

Algebraische Topologie und Fixpunkte

Von der Idee der algebraischen Topologie zur Fixpunktformel von Lefschetz – ein einführender Überblick

JÖRG BEWERSDORFF¹

1. Die Idee der algebraischen Topologie

1.1 Die mathematische Disziplin der Topologie ist historisch aus dem Studium qualitativer Eigenschaften von geometrischen Objekten entstanden. Das heißt, die Untersuchung der betreffenden Objekte erfolgt ohne Berücksichtigung von quantitativen Daten wie Fläche oder Volumen einzig hinsichtlich solcher Eigenschaften, die bei einer „kontinuierlichen Deformation“ erhalten bleiben. Beispiele für solche qualitativen Eigenschaften geometrischer Objekte sind die Anzahl von „Löchern“ sowie die Zahl unzusammenhängender Teile.

Formale Grundlage „kontinuierlicher Deformationen“ ist der circa 1820 geprägte Begriff der Stetigkeit. Die Topologie wird so zu einer Theorie der Stetigkeit. Ideen folgend, wie sie im Wesentlichen Felix Hausdorff 1912 entwickelt hat, lässt sich Stetigkeit in allgemeinste Weise für Abbildungen zwischen sogenannten topologischen Räumen² definieren – dazu gehören insbesondere Teilmengen des n -dimensionalen euklidischen Raumes \mathbb{R}^n .

Da viele in der Topologie untersuchten Objekte lokal die Gestalt eines euklidischen Raumes aufweisen, liegt es nahe, solche Objekte in kleine, sich euklidisch verhaltende Einzelstücke zu zerschneiden. Die Untersuchung des ursprünglichen Objektes kann dann auf Basis einer formalen Beschreibung der Zusammensetzung der Einzelteile – quasi entsprechend der Aufbauanleitung einer Faltschachtel – erfolgen.

Einen methodisch besonderen Ansatz verfolgt die Unterdisziplin der zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts entwickelten algebraischen Topologie. Mit deren Methoden ist es nämlich möglich, topologische Sachverhalte – beschrieben etwa durch geeignete Zerlegungen des zu untersuchenden Objekts – in algebraische Sachverhalte zu transformieren. Etwas konkreter: Eigenschaften von topologischen Räumen einerseits sowie von stetigen Abbildungen zwischen diesen topologischen Räumen andererseits werden in Eigenschaften von algebraischen Objekten wie abelschen Gruppen und Vektorräumen beziehungsweise von deren „Morphismen“, das sind Gruppenhomomorphismen beziehungsweise lineare Abbildungen, übersetzt. Dabei gehen beim Übersetzungsvorgang meist viele Detailinformationen verloren. Dieser Informationsverlust muss allerdings keineswegs nachteilig sein. Ganz im Gegenteil ist es für die angestrebten Rückschlüsse sogar oft vorteilhaft, wenn in Bezug auf den aktuellen Blickwinkel uninteressante

¹ www.bewersdorff-online.de

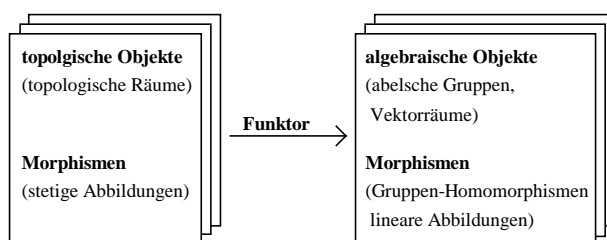
² Ein **topologischer Raum** ist definiert als eine Menge, die über ein System von per Definition als „offen“ bezeichneten Teilmengen verfügt, die sich bei Mengenoperationen so verhalten, wie man es vom klassischen Fall des Zahlenstrahls der reellen Zahlen und seiner offenen Teilmengen her kennt: Offen sind der gesamte Raum, die leere Menge, der Durchschnitt einer endlichen Zahl von offenen Mengen und die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen.

Ein Mengensystem mit solchen Eigenschaften reicht bereits dazu aus, die intuitive Vorstellung der „Nähe“ zu einem Element des Raumes zu formalisieren und so Begriffe wie Konvergenz einer Folge und Stetigkeit zu definieren: So wird eine Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen per Definition stetig genannt, wenn das Urbild jeder offenen Menge ebenfalls offen ist.

Details ausgeblendet werden, da sich dann die Komplexität der verbleibenden Beziehungen verringert und so der eigentlich interessierende Sachverhalt sogar noch deutlicher hervortritt.

Bei der Konstruktion der algebraischen Bildobjekte ist es das Ziel, dass eine **homeomorphe**, das heißt eine umkehrbare und in beiden Richtungen stetige Transformation des topologischen Raumes – abgesehen von einer Isomorphie – keine Veränderung des algebraischen Bildobjektes hervorruft. Und auch bei einer stetigen Abbildung, die wie ihr algebraisches Äquivalent ebenfalls als Morphismus bezeichnet wird, soll eine topologisch unwesentliche Deformationen das algebraische Bild unverändert lassen. Konkret wird dafür der sogenannte Begriff der **Homotopie** von Abbildungen verwendet: Zwei stetige Abbildungen mit jeweils gleichem Urbild- und Bildbereich heißen per Definition zueinander homotop, wenn sie sich mittels einer über das Intervall $[0,1]$ parametrisierten Schar von Abbildungen stetig ineinander transformieren lassen (ein Beispiel sind zwei Wegparametrisierungen mit übereinstimmendem Anfangs- und Endpunkt, die nicht durch ein „Loch“ getrennt sind). Und zwei topologische Räume heißen **homotopie-äquivalent**, wenn es zwischen ihnen zwei Abbildungen – in jede Richtung eine – gibt, so dass beide Hintereinanderschaltungen homotop zur jeweiligen Identität sind.

Offensichtlich ist der Begriff der Homotopie-Äquivalenz eine Abschwächung des Begriffes der Homeomorphie: Denn einerseits hat jede Homeomorphie die Homotopie-Äquivalenz zur Konsequenz. Und andererseits sind Punkt und Kreisscheibe (ob abgeschlossen oder offen) zwar nicht homeomorph zueinander, wohl aber zueinander homotopie-äquivalent, da das aus Inklusion und Projektion bestehende Abbildungspaar den Anforderungen der Definition der Homotopie-Äquivalenz genügt.



Im Folgenden soll ein Überblick über das Konzept der sogenannten Homologie-Gruppen gegeben werden. Diese Konstruktion besitzt die Eigenschaft, dass einerseits die algebraischen Bildobjekte von zwei zueinander homotopie-äquivalenten topologischen Räumen identisch (das heißt zueinander isomorph) sind, und dass andererseits die algebraischen Bilder von zwei zueinander homotopen Abbildungen identisch sind.

Die Definition von Homologie-Gruppen kann in verschiedener Weise (und in unterschiedlicher Allgemeinheit) erfolgen. Alle Definitionen sind allerdings sehr abstrakt und zwar in einer Weise, dass unmittelbar aus der jeweiligen Definition die konkrete Gestalt der Homologie-Gruppen nicht ersichtlich ist. Insbesondere diesem Umstand verdankt die algebraische Topologie ihren Ruf, sehr abstrakt und schwierig zu sein. Einen Teil dieser Schwierigkeit verliert die algebraische Topologie, wenn der Lernende seinen oft selbstgesetzten Ehrgeiz reduziert: Denn so verständlich der Wunsch sein mag, mathematische Konzepte konkret und explizit anzuwenden zu können, so sehr muss auch darauf verwiesen werden, dass wir in anderen Wissenschaften anscheinend eher bereit sind zu akzeptieren, nicht jedes Detail

selbst ausführen zu können. So wissen wir zum Beispiel, dass die chemischen Eigenschaften eines Elementes durch die Zahl der Elektronen beziehungsweise die dazu identische Zahl von Protonen im Atomkern festgelegt wird, und dass bei einem Isotop die Zahl der Protonen und Neutronen für die Stabilität des Kerns verantwortlich ist. Wer aber wüsste ad hoc, wie man diese Anzahlen von Kernteilchen für eine vorliegende Materialprobe bestimmt?

1.2 Für die Homologie-Gruppen gibt es zwei klassische Definitionen:

- Das erste Homologie-Konzept, **singuläre Homologie** genannt, ist relativ einfach und universell für jeden topologischen Raum definierbar und auf seine Eigenschaften untersuchbar. Dafür ist die Definition aber noch nicht einmal ansatzweise in direkter Weise konkret anwendbar.
- Das zweite Konzept, die so genannte **simpliziale Homologie**, ist nur für spezielle topologische Räume, nämlich für Polyeder im n -dimensionalen euklidischen Raum definiert, und das auch nur auf Basis einer simplizialen Zerlegung. Die Definition ist in ihren technischen Details alles andere als einfach, aber sie beruht im Gegensatz zur Definition der singulären Homologie auf einem endlichen Konstruktionsprozess und lässt sich daher zumindest im Prinzip praktisch anwenden.

Wichtig ist die Äquivalenz der beiden Definitionen: Mit einem allerdings nicht unerheblichen Aufwand lässt sich nämlich beweisen, dass für Polyeder beide Homologien, das heißt die singuläre Homologie einerseits und die simpliziale Homologie zu einer *beliebigen* simplizialen Zerlegung andererseits, zu identischen – das heißt zu zueinander isomorphen – Ergebnissen führen.

Die Eigenschaften der singulären Homologie-Gruppen, die sich natürlich im Fall von Polyedern auch auf die dazu isomorphen simplizialen Homologie-Gruppen übertragen, sind die folgenden³:

- Zu jedem topologischen Raum X gibt es eine Folge von Vektorräumen (über einem der Konstruktion zugrundegelegten Körper) $H_0(X)$, $H_1(X)$, ..., die man bezeichnungsmäßig mit $H_*(X) = (H_q(X))_{q=0,1,\dots}$ zusammenfasst.
- Zu jeder stetigen Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen zwei topologischen Räumen X und Y existiert eine Folge $H_*(f) = (H_q(f))_{q=0,1,\dots}$ von linearen Abbildungen $H_q(f): H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$.
- Im Fall der identischen Abbildung $\text{id}: X \rightarrow X$ gilt $H_q(\text{id}) = \text{id}$ für $q = 0, 1, \dots$
- Ist auf Basis eines dritten topologischen Raumes Z noch eine zweite stetige Abbildung $g: Y \rightarrow Z$ definiert, so gilt $H_q(g \circ f) = H_q(g) \circ H_q(f)$ für $q = 0, 1, \dots$
- Zwei zueinander homotope Abbildungen besitzen übereinstimmende Abbilder auf Homologie-Niveau.

³ In der sogenannten **Kategorientheorie** werden solche Konstruktionen in sehr allgemeiner Weise untersucht. Die ersten vier Eigenschaften entsprechen denen eines (kovarianten) **Funktors** von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der Vektorräume.

- Ist der topologische Raum X ein-elementig, so ist $H_q(X) = \{0\}$ für $q \geq 1$.

Lesern, die das erste Mal mit der Begriffswelt der algebraischen Topologie konfrontiert werden, sollten die angegebenen Eigenschaften am besten als Axiome verstehen und einfach versuchen zu glauben, dass es Konstruktionen gibt, die diese Eigenschaften erfüllen. Man kann dann sofort weitere Eigenschaften nachweisen, etwa dass zwei topologische Räume, die zueinander homotopie-äquivalent (oder gar homeomorph) sind, isomorphe Homologie-Gruppen besitzen. Der Beweis dieser, das zentrale Ziel der Homologie-Konstruktion bestätigenden Eigenschaft ergibt sich sofort aus der Definition der Homotopie-Äquivalenz sowie aus einigen der gerade aufgelisteten Homologie-Eigenschaften. Zur Prüfung des eigenen Verständnisses wird Lesern dringend empfohlen, sich selbst davon zu überzeugen, dass es sich wirklich um eine direkte Folgerung handelt.

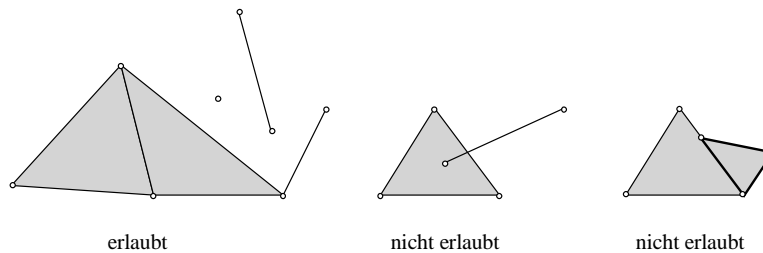
Trotz des angestrebten Überblickcharakters ist der nun folgende, zweite Teil der vorliegenden Einführung in einigen Details etwas technisch. Leser sollten sich dadurch keinesfalls abschrecken lassen, sondern gegebenenfalls mit der Lektüre des Resümees von Teil 2 in Abschnitt 2.9 fortfahren, um dann die Anwendungen im dritten Teil kennenzulernen.

2. Simpliciale Homologie

2.1 Um im dritten Teil die sogenannte Lefschetz'sche Fixpunktformel erläutern zu können, muss zunächst die Konstruktion der simplicialen Homologie konkretisiert werden. Dabei ist anzumerken, dass wesentliche Teile der Konstruktion universell auch für andere Homologie-Konzepte gelten. Das betrifft insbesondere die Eigenschaften der als **Kettenkomplex** bezeichneten Folge von Mengen C_q sowie der auf ihnen definierten Homomorphismen⁴.

Bei einer simplicialen Zerlegung eines Polyeders im n -dimensionalen euklidischen Raum handelt es sich um eine endliche Menge \mathbf{K} von orientierten, abgeschlossenen Simplexen, so dass

- jeder Punkt des Polyeders zum Inneren von genau einem Simplex aus der Menge \mathbf{K} gehört und
- jeder Randsimplex eines zur Menge \mathbf{K} gehörenden Simplex selbst wieder zu \mathbf{K} gehört.



Die Punktmenge des zur simplicialen Zerlegung \mathbf{K} gehörenden Polyeders bezeichnen wir mit $|\mathbf{K}|$.

Formal lässt sich die Orientierung eines Simplex dadurch charakterisieren, dass man diesen Simplex zunächst mit der Menge seiner in einer festen Reihenfolge sortierten Ecken s_0, \dots, s_q identifiziert: $\Delta(s_0, \dots, s_q)$. Dabei werden per Definition ungerade Permutationen dieser Reihenfolge als orientierungsumkehrend interpretiert, während gerade Permutationen der Ecken als identische Transformation des Simplex verstanden werden.

Nachdem wir der Einfachheit halber als Grundkörper den Körper der rationalen Zahlen ausgewählt haben, lassen sich zur simplicialen Zerlegung \mathbf{K} für jeden Index $q = 0, 1, \dots$ die endlichdimensionalen Vektorräume $C_0(\mathbf{K}), C_1(\mathbf{K}), \dots$, definieren: Man bildet zunächst die Menge $S_q(\mathbf{K})$ der q -dimensionalen Simplexe der Zerlegung \mathbf{K} . Anschließend bildet man die formalen Linearkombinationen dieser q -dimensionalen Simplexe und erhält so den endlichdimensionalen Vektorraum $C_q(\mathbf{K})$ der sogenannten **q -Ketten**. Für hohe Dimensionen q , zu denen die simpliciale Zerlegung \mathbf{K} keinen Simplex enthält, ist damit $C_q(\mathbf{K}) = 0$.

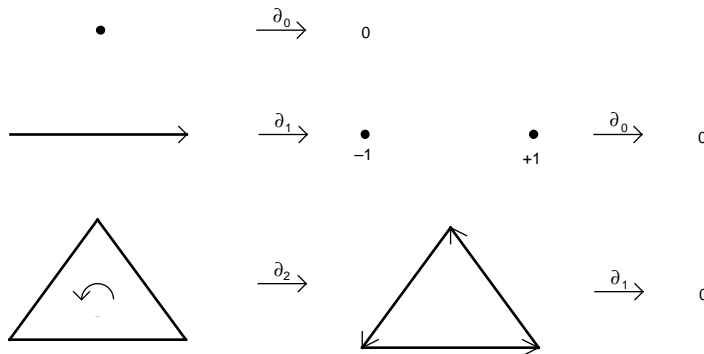
Hier nur angemerkt wird, dass man für einen beliebigen topologischen Raum X die singuläre Homologie-Theorie erhält, wenn man zum Aufspannen des Vektorraumes der q -Ketten die Menge der stetigen Abbildungen $\Delta(e_0, \dots, e_q) \rightarrow X$ mit dem Standardsimplex $\Delta(e_0, \dots, e_q)$ als Definitionsbe-

⁴ Der algebraische Teil der Überlegungen wird daher meist zu einer eigenständigen mathematischen Teildisziplin, der sogenannten **Homologischen Algebra**, zusammengefasst.

reich verwendet. Die q -Ketten der singulären Homologie bilden damit in der Regel einen unendlichdimensionalen Vektorraum.

2.2 Auf dem Vektorraum $C_q(\mathbf{K})$ der q -Ketten lässt sich ein sogenannter **Randoperator** definieren. Dieser ordnet jedem q -dimensionalen Simplex die Summe seiner mit geeignetem Vorzeichen versehenen $(q-1)$ -dimensionalen Randkomponenten zu. Anschließend vollendet eine lineare Fortsetzung die Definition des Randoperators $\partial_q: C_q(\mathbf{K}) \rightarrow C_{q-1}(\mathbf{K})$.

Für die Dimensionen $q \leq 2$ sagt ein Bild mehr als Formeln oder Worte⁵:



Nicht nur Liebhaber von Formeln mit vielen Indizes werden sicher die Definitionsformel für den Randoperator bevorzugen, die für die ersten drei Dimensionen sowie allgemein wie folgt lautet:

$$\begin{aligned} \partial_1 \Delta(s_0, s_1) &= \Delta(s_1) - \Delta(s_0) \\ \partial_2 \Delta(s_0, s_1, s_2) &= \Delta(s_1, s_2) - \Delta(s_0, s_2) + \Delta(s_0, s_1) \\ \partial_3 \Delta(s_0, s_1, s_2, s_3) &= \Delta(s_1, s_2, s_3) - \Delta(s_0, s_2, s_3) + \Delta(s_0, s_1, s_3) - \Delta(s_0, s_1, s_2) \\ \partial_q \Delta(s_0, \dots, s_q) &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \Delta(s_0, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_q) \end{aligned}$$

Die bereits aufgrund der Abbildung zu vermutende Eigenschaft $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$ gilt tatsächlich allgemein und ist eine der wesentlichen Grundlagen einer Homologie-Konstruktion. Wegen der damit gültigen Inklusionen

$$\text{Im}(\partial_{q+1}) \subseteq \text{Ker}(\partial_q) \subseteq C_q(\mathbf{K})$$

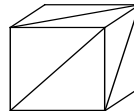
werden die folgenden Definitionen sinnvoll:

$$\begin{aligned} B_q(\mathbf{K}) &= \text{Im}(\partial_{q+1}) \\ Z_q(\mathbf{K}) &= \text{Ker}(\partial_q) \\ H_q(\mathbf{K}) &= Z_q(\mathbf{K}) / B_q(\mathbf{K}) \end{aligned}$$

⁵ Wer sich bei dieser Illustration an Randbildungen von Integrationsbereichen bei Integralsätzen wie dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und seiner höherdimensionaler Analoga wie dem Satz von Stokes erinnert fühlt, liegt übrigens völlig richtig. Und auch die Integranden haben ihre Entsprechung, nämlich in Form von konstanten Funktionen, die auf der Menge der Simplexe definiert sind (diese Funktionen kann man als Approximationen der Differentialformen interpretieren, die als Integranden in den klassischen Integralsätzen fungieren). Solche Funktionen bilden übrigens den Ausgangspunkt für die Konstruktion sogenannter Kohomologie-Gruppen.

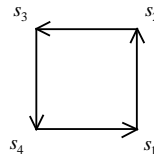
Die Elemente des Unterraumes $Z_q(\mathbf{K})$ werden als **q -Zykel** bezeichnet, die Elemente des darin enthaltenen Unterraumes $B_q(\mathbf{K})$ als **q -Ränder**. Die „Größe“, das heißt die als q -te **Betti-Zahl** bezeichnete Dimension, des Homologie-Vektorraumes $H_q(\mathbf{K})$ ist ein Maß dafür, wie stark die Gesamtheit der q -Zykel diejenige der q -Ränder übersteigt.

Die Begriffsbildung der Ränder dürfte bereits durch die letzte Abbildung plausibel geworden sein. Der Begriff des Zyklus leitet sich daraus ab, dass beispielsweise den 1-Zykeln geschlossene Polygonzüge entsprechen. In einem Polyeder ohne Löcher lassen sich diese 1-Zykel tatsächlich als Rand einer Summe von 2-Simplexen darstellen. Hingegen gibt es beispielsweise auf der Oberfläche eines Torus geschlossene Wege, die *nicht* Rand einer Fläche sind. Ein Beispiel für einen 2-Zykel findet man auf einer in 12 gleichorientierte Dreiecke zerlegte Würfeloberfläche. Dort ergibt die Summe dieser 12 zweidimensionalen Simplexe einen 2-Zykel.



Das einfachste Beispiel einer simplizialen Zerlegung ist diejenige eines Punktes. Die einzige dafür mögliche simpliziale Zerlegung \mathbf{K} besteht aus einem einzigen 0-Simplex, und es gilt offensichtlich $H_0(\mathbf{K}) = \mathbb{Q}$ sowie $H_q(\mathbf{K}) = \{0\}$ für $q \geq 1$. Bei mehreren Punkten erhöht sich die Dimension der 0-ten Homologie-Gruppe $H_0(\mathbf{K})$ entsprechend.

Der zu einer Kreisscheibe S^1 homeomorphe Rand eines Quadrates lässt sich in vier 0-Simplexe, nämlich die vier Ecken s_1, \dots, s_4 , und vier 1-Simplexe, das sind die Seiten des Quadrats, zerlegen. Für diese Zerlegung \mathbf{K} erhält man



$$\begin{aligned}
 Z_0(\mathbf{K}) &= \{x_1 s_1 + \dots + x_4 s_4 \mid x_1, \dots, x_4 \in \mathbb{Q}\}, \\
 B_0(\mathbf{K}) &= \{x_1 s_1 + \dots + x_4 s_4 \mid x_1, \dots, x_4 \in \mathbb{Q} \text{ mit } x_1 + \dots + x_4 = 0\}, \\
 Z_1(\mathbf{K}) &= \{x_1 \Delta(s_1, s_2) + \dots + x_4 \Delta(s_4, s_1) \mid x_1, \dots, x_4 \in \mathbb{Q} \text{ mit } x_1 = \dots = x_4\}, \\
 B_1(\mathbf{K}) &= \{0\}
 \end{aligned}$$

und damit $H_0(\mathbf{K}) \cong \mathbb{Q}$, $H_1(\mathbf{K}) \cong \mathbb{Q}$ und $H_q(\mathbf{K}) = \{0\}$ für $q \geq 2$. Wir beschließen das Beispiel mit einem Ausblick auf die durch stetige Selbstabbildungen des Quadratrandes induzierten Homomorphismen auf Homologie-Niveau: Auf dem ersten Homologie-Niveau $H_1(\mathbf{K})$ entspricht jeder solche Homomorphismus der Multiplikation mit einer ganzen Zahl, dem sogenannten Abbildungsgrad, der die Vielfachheit des Umlaufs beschreibt. Auf dem 0-ten Homologie-Niveau $H_0(\mathbf{K})$ wird – wie durch jede andere stetige Selbstabbildung der simplizialen Zerlegung eines zusammenhängenden Polyeders – die Identität induziert.

2.3 Für das Ziel, jeder stetigen Abbildung zwischen zwei Polyedern mit den simplizialen Zerlegungen \mathbf{K} und \mathbf{K}' für $q = 0, 1, \dots$ eine Folge von Homomorphismen $H_q(\mathbf{K}) \rightarrow H_q(\mathbf{K}')$ zuzuordnen, sind mehrere Schritte zu tun.

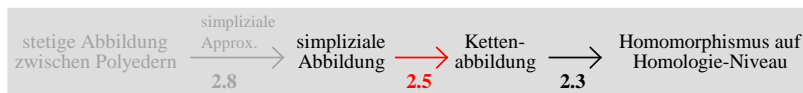


Dabei besitzt der letzte Schritt als rein algebraische Konstruktion eine eigenständige Bedeutung und ist auch universell auf jede andere Homologie-Theorie übertragbar: Sind für alle Indizes $q = 0, 1, \dots$ lineare Abbildungen auf Ketten-Niveau $\varphi_q: C_q(\mathbf{K}) \rightarrow C_q(\mathbf{K}')$ gegeben, so induzieren diese auch

auf Homologie-Niveau lineare Abbildungen, sofern die Abbildungen $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ mit den Randoperatoren „verträglich“, das heißt vertauschbar, sind: $\partial_q \circ \varphi_q = \varphi_{q-1} \circ \partial_q$ (zu beachten ist, dass dabei ∂_q sowohl den Randoperator auf $C_q(\mathbf{K})$ als auch auf $C_q(\mathbf{K}')$ bezeichnet). Inhaltlich bedeutet diese Identität, dass für jede Kette der Rand eines Bildes gleich dem Bild des Randes ist. Formal stellt die Identität insbesondere sicher, dass q -Zykel auf q -Zykel und q -Ränder auf q -Ränder abgebildet werden. Eine solche Folge von Homomorphismen, die mit den Randoperatoren verträglich sind, heißt **Kettenabbildung** oder auch **Homomorphismus von Komplexen**.

2.4 Abgesehen vom topologisch inspirierten Namen ebenfalls rein algebraisch und universell ist der Begriff der **Kettenhomotopie**: Zwei Kettenabbildungen $\varphi_q, \psi_q: C_q(\mathbf{K}) \rightarrow C_q(\mathbf{K}')$ ($q = 0, 1, \dots$) heißen kettenhomotop, wenn ihre Differenzen auf Basis einer Folge von indexerhöhenden Homomorphismen $D_q: C_q(\mathbf{K}) \rightarrow C_{q+1}(\mathbf{K}')$ die Identität $\varphi_q - \psi_q = \partial_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q$ erfüllen (dabei ist per Definition $D_{-1} = 0$). Da der erste Summand ein q -Rand ist und der zweite Summand für q -Zykel verschwindet, induzieren zueinander kettenhomotope Kettenabbildungen auf Homologie-Niveau die gleichen Homomorphismen. So einfach dieser Nachweis auch sein mag, so wenig plausibel erscheint auf den ersten Blick die formale Anforderung an eine Kettenhomotopie. Diese Plausibilität wird erst durch die weiteren topologischen Erörterungen erreicht werden.

2.5 Der zweite Schritt auf dem Weg, jeder stetigen Abbildung f zwischen zwei simplizialen Polyeder-Zerlegungen \mathbf{K} und \mathbf{K}' eine Folge von Homomorphismen auf Homologie-Niveau $H_q(f): H_q(\mathbf{K}) \rightarrow H_q(\mathbf{K}')$ zuzuordnen, besteht darin, Kettenabbildungen $f_q: C_q(\mathbf{K}) \rightarrow C_q(\mathbf{K}')$ für eine Klasse beson-



ders einfacher Abbildungen⁶ zu konstruieren, die man als simplizial bezeichnet. Eine solche **simpliziale Abbildung** zeichnet sich per Definition durch die beiden folgenden Eigenschaften aus:

- Die Eckenmenge eines jeden Simplex der simplizialen Zerlegung \mathbf{K} wird in die Eckenmenge *eines* Simplex der simplizialen Zerlegung \mathbf{K}' abgebildet, wobei durchaus Bilder verschiedener Ecken zusammenfallen können.
- Außerdem muss die Abbildung im Inneren eines zur simplizialen Zerlegung \mathbf{K} gehörenden Simplex verträglich mit der Bildung konvexer Linearkombinationen sein.

Konkret wird damit ein q -dimensionaler Simplex σ der simplizialen Zerlegung \mathbf{K} entweder auf einen Simplex niedrigerer Dimension „zusammengedrückt“ oder aber andernfalls bijektiv mit gegebenenfalls geänderter Orientierung auf einen Simplex τ aus \mathbf{K}' abgebildet, der die gleiche Dimension wie der Urbildsimplex σ besitzt. Auf Basis dieses Verhaltens definieren wir das Bild von σ , nun aufgefasst als q -Kette im Vektorraum $C_q(\mathbf{K})$, unter der zu definierenden Abbildung $f_q: C_q(\mathbf{K}) \rightarrow C_q(\mathbf{K}')$:

⁶ Wir erinnern uns daran, dass auch die Integrationstheorie mit einfachen Funktionen startet, nämlich Treppenfunktionen, also Funktionen, die stückweise konstant sind.

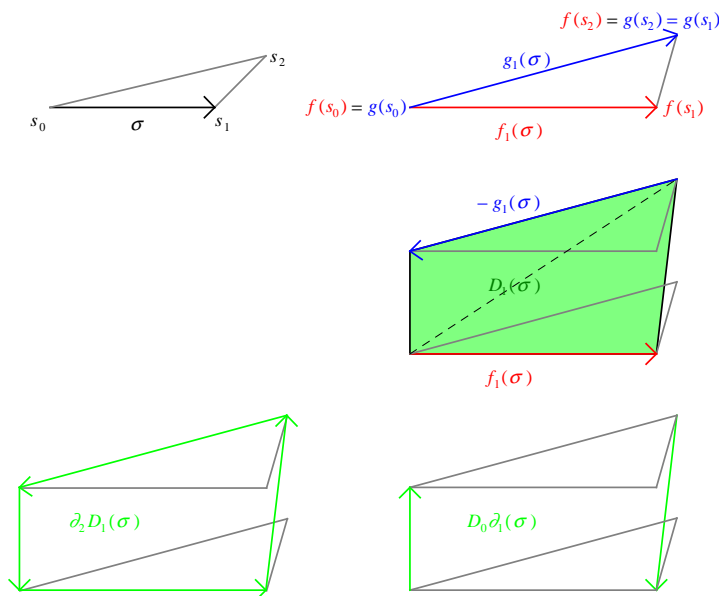
- $f_q(\sigma) = 0$ im Fall des Zusammendrückens, ansonsten
- $f_q(\sigma) = \pm \tau$, wobei das Vorzeichen die Orientierung des Bildes widerspiegelt.

Im letzten Fall gilt offensichtlich die Identität $\partial_q \circ f_q(\sigma) = f_{q-1} \circ \partial_q(\sigma)$, und im ersten Fall sind beide Seiten der Gleichung gleich 0. Da sich die Identität $\partial_q \circ f_q = f_{q-1} \circ \partial_q$ auf den gesamten Vektorraum der q -Ketten $C_q(\mathbf{K})$ überträgt, liegt wie gewünscht eine Kettenabbildung vor, die schließlich Homomorphismen auf Homologie-Niveau $H_q(f): H_q(\mathbf{K}) \rightarrow H_q(\mathbf{K}')$ induziert.

2.6 Die zuletzt durchgeführte Konstruktion hat eine entscheidende Eigenschaft: Sind zwei simpliziale Abbildungen zueinander homotop, dann induzieren sie denselben Homomorphismus auf Homologie-Niveau. Wir wollen uns hier den Sachverhalt an Hand eines typischen Beispiels verdeutlichen, bei dem wir die Veränderung der Kettenabbildungen untersuchen, die von einer minimalen, lokalen Abänderung einer simplizialen Abbildung verursacht wird. Konkret werden wir das Bild einer einzigen Ecke ändern und zur davon ausgehenden Änderung der Kettenabbildung eine als **Prismenoperator** bezeichnete Kettenhomotopie $D_q: C_q(\mathbf{K}) \rightarrow C_{q+1}(\mathbf{K}')$ konstruieren.

Die folgende Abbildung zeigt zwei simpliziale Abbildungen f und g im Bereich eines 2-Simplex, wobei wir annehmen, dass die beiden Ecken s_0 und s_2 durch die beiden Abbildungen f und g übereinstimmend abgebildet werden, während die Ecke s_1 durch die beiden Abbildungen auf verschiedene Ecken abgebildet wird:

$$f(s_0) = g(s_0), f(s_2) = g(s_2) = g(s_1) \neq f(s_1)$$

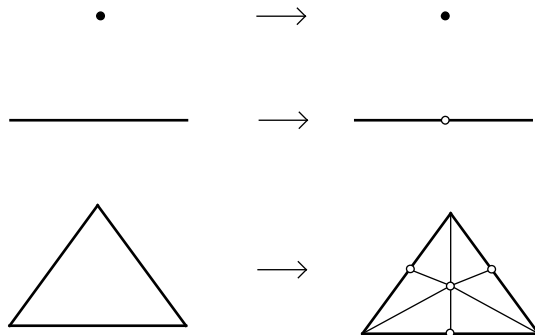


Beginnend mit der mittleren Graphik ist das lokale Abbildungsverhalten der beiden Abbildungen f und g getrennt dargestellt, um die grün ange deutete Homotopie deutlicher hervortreten zu lassen. Auf Basis dieser Homotopie wird zum 1-Simplex $\sigma = \Delta(s_0, s_1)$ die alternierende Summe von 2-Simplexen $D_1(\sigma)$ definiert, die im vorliegenden Fall nur einen echten 2-Simplex

umfasst, da zwei der vermeintlich vier Ecken des grünen Bereiches zusammenfallen⁷. Aus der Abbildung erkennt man schließlich

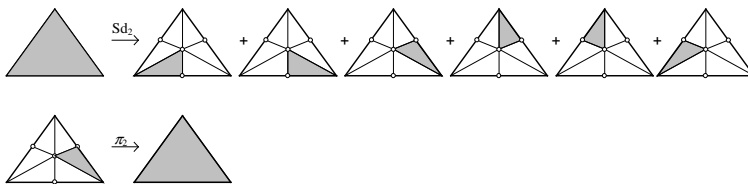
$$f_1(\sigma) - g_1(\sigma) = \partial_2 \circ D_1(\sigma) + D_0 \circ \partial_1(\sigma).$$

2.7 Wir wollen nun noch einen wichtigen Spezialfall der gerade plausibel gemachten Homotopie-Invarianz erörtern. Wir betrachten dazu die sogenannte **baryzentrische Verfeinerung** eines Simplex, die entsteht, wenn der Simplex selbst und alle seine Randsimplexe um ihren Schwerpunkt ergänzt werden. Auch bei dieser Konstruktion übergehen wir die formalen Details und begnügen uns mit einer der Anschauung dienenden Abbildung (die Orientierungen der Simplexe sind diesmal nicht dargestellt):



Man kann nun zwei lineare Abbildungen zwischen den beiden Vektorräumen der q -Ketten zur simplizialen Zerlegung \mathbf{K} einerseits und seiner baryzentrischen Verfeinerung $\text{Sd}(\mathbf{K})$ andererseits definieren:

- Der sogenannte **Unterteilungsoperator** $\text{Sd}_q: C_q(\mathbf{K}) \rightarrow C_q(\text{Sd } \mathbf{K})$ ordnet jedem Simplex die Summe der Teilsimplexe zu, aus denen er besteht. Da der Unterteilungsoperator offensichtlich mit dem Randoperator vertauschbar ist, handelt es sich um eine Kettenabbildung.
- Wählt man bei der baryzentrischen Verfeinerung zu jedem Schwerpunkt einen zugehörigen 0-Simplex der ursprünglichen Zerlegung aus, dann erhält man daraus eine als **Verschiebungsabbildung** bezeichnete simpliziale Abbildung π der Zerlegung $\text{Sd } \mathbf{K}$ in die simpliziale Zerlegung \mathbf{K} und damit eine Kettenabbildung $\pi_q: C_q(\text{Sd } \mathbf{K}) \rightarrow C_q(\mathbf{K})$.



⁷ Der Prismenoperator D_q ist für $q \in \{0, 1\}$ sowie allgemein wie folgt definiert:

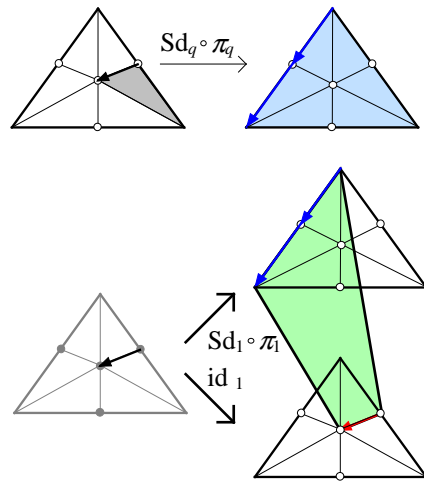
$$D_0(\Delta(s_0)) = -\Delta(f(s_0), g(s_0))$$

$$D_1(\Delta(s_0, s_1)) = \Delta(f(s_0), f(s_1), g(s_1)) - \Delta(f(s_0), g(s_0), g(s_1))$$

$$D_q(\Delta(s_0, \dots, s_q)) = \sum_{i=0}^q (-1)^{i+1} \Delta(f(s_0), \dots, f(s_i), g(s_i), \dots, g(s_q))$$

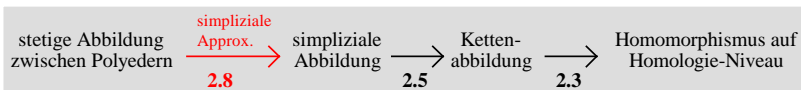
Dabei werden Simplexe $\Delta(\dots)$, bei denen Ecken zusammenfallen, in $C_q(\mathbf{K})$ als 0 gewertet. Diese Sonderfallbehandlung kann vermieden werden, wenn man die Kettenhomotopie innerhalb von $|\mathbf{K}| \times [0, 1]$ konstruiert. Dann findet die Konstruktion der Prismen zwischen den beiden Deckeln $|\mathbf{K}| \times \{0\}$ und $|\mathbf{K}| \times \{1\}$ statt.

Offensichtlich gilt die Identität $\pi_q \circ \text{Sd}_q = \text{id}$, die sich auf Homologie-Niveau überträgt: $H_q(\pi) \circ \text{Sd}_q = \text{id}$. Ausschließlich auf Homologie-Niveau gilt die umgekehrte Identität, nämlich $\text{Sd}_q \circ H_q(\pi) = \text{id}$. Zum Nachweis dafür wird eine Kettenhomotopie zwischen $\text{Sd}_q \circ \pi_q$ und der identischen Kettenabbildung $\text{id}_q: C_q(\text{Sd } \mathbf{K}) \rightarrow C_q(\text{Sd } \mathbf{K})$ konstruiert: Schaut man sich das nachfolgende, der Verdeutlichung dienende Bild an, so scheint auf den ersten Blick die gleiche Situation vorzuliegen wie in Abschnitt 2.6. Im Unterschied zur dort untersuchten Situation ist allerdings die Abbildung $\text{Sd}_q \circ \pi_q$ keine simpliziale Abbildung. Vielmehr wird ein Simplex aus $S_q(\text{Sd } \mathbf{K})$ unter der Kettenabbildung $\text{Sd}_q \circ \pi_q$ auf eine Summe von mehreren Simplexen abgebildet, die allerdings exakt *einem* einzigen Simplex aus $S_q(\mathbf{K})$ entsprechen. Und aufgrund dieser Eigenschaft kann dann wieder die Konstruktion der Kettenhomotopie mittels des Prismenoperators durchgeführt werden.



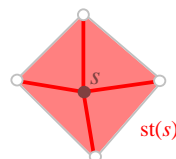
Damit sind die beiden Homologie-Gruppen $H_q(\text{Sd } \mathbf{K})$ und $H_q(\mathbf{K})$ zueinander isomorph. Einen der beiden Kettenabbildungen, die diesen Isomorphismus induzieren, nämlich den Unterteilungsoperator $\text{Sd}_q: C_q(\mathbf{K}) \rightarrow C_q(\text{Sd } \mathbf{K})$, werden wir im weiteren Verlauf noch brauchen.

2.8 Wir kommen nun zum noch ausstehenden, chronologisch eigentlich ersten von drei Schritten auf dem Weg, jeder stetigen Abbildung f zwischen zwei simplizialen Polyeder-Zerlegungen \mathbf{K} und \mathbf{K}' eine Folge von Homo-



morphismen auf Homologie-Niveau $H_q(f): H_q(\mathbf{K}) \rightarrow H_q(\mathbf{K}')$ zuzuordnen. Dies geschieht durch eine Approximation der gegebenen Abbildung f durch eine simpliziale Abbildung g , die zur ursprünglichen Abbildung f homotop ist, so dass sich für jeden Index $q = 0, 1, \dots$ auf Homologie-Niveau eine eindeutig bestimmte, das heißt nicht von der gewählten Approximation g abhängende, Abbildung $H_q(f) = H_q(g)$ definieren lässt.

Technische Grundlage zur Durchführung der simplizialen Approximation sind sogenannte **Sternumgebungen**. Dabei umfasst die Sternumgebung $\text{st}(s)$ einer Ecke s aus

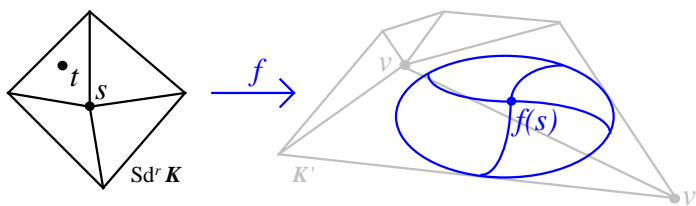


einer simplizialen Zerlegung per Definition alle um ihren Rand vermindernden Simplexe, zu denen s gehört.

Um die simpliziale Approximation der stetigen Abbildung f durchführen zu können, wird nun die simpliziale Zerlegung \mathbf{K} des Definitionsbereichs genügend oft baryzentrisch zu $\text{Sd}' \mathbf{K}$ verfeinert. Das wird so lange getan, bis jede Sternumgebung einer Ecke s der verfeinerten Zerlegung $\text{Sd}' \mathbf{K}$ in eine Sternumgebung einer geeignet ausgewählten Ecke v der simplizialen Zerlegung \mathbf{K}' abgebildet wird: $f(\text{st}(s)) \subseteq \text{st}(v)$. Dass man überhaupt stets eine solche Ecke v finden kann, ist nicht ganz offensichtlich. Zunächst gibt es nämlich eine Zahl $\varepsilon > 0$, so dass jede offene Ballumgebung $U_\varepsilon(y)$ eines Punktes y des Polyeders $|\mathbf{K}'|$ in einer geeignet ausgewählten Sternumgebung $\text{st}(v)$ der simplizialen Zerlegung \mathbf{K}' liegt⁸. Da die auf dem Kompaktum $|\mathbf{K}'|$ definierte Abbildung f gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass jede Ballumgebung $U_\delta(x)$ eines Punktes x im Polyeder $|\mathbf{K}'|$ in einen ε -Ball um $f(x)$ abgebildet wird: $f(U_\delta(x) \cap |\mathbf{K}'|) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$. Da die Durchmesser der Simplexe bei genügend lang fortgesetzter baryzentrischer Unterteilung beliebig klein werden, liegt das Bild einer solchen Sternumgebung $f(\text{st}(s))$ tatsächlich stets in einer Sternumgebung $\text{st}(v)$ einer geeignet ausgewählten Ecke v der simplizialen Zerlegung \mathbf{K}' :

$$f(\text{st}(s)) \subseteq f(U_\delta(s) \cap |\mathbf{K}'|) \subseteq U_\varepsilon(f(s)) \subseteq \text{st}(v)$$

Es bleibt anzumerken, dass die Ecke v nicht eindeutig bestimmt sein muss. So könnte in der folgenden Abbildung statt der Ecke v der simplizialen Zerlegung \mathbf{K}' auch die Ecke v' gewählt werden:



Im eigentlichen Beweis des **Approximationssatzes** wird nun f durch eine simpliziale Abbildung g mit $g(s) = v$ approximiert. Da die zu s benachbarten Ecken, das heißt jene Ecken der simplizialen Zerlegung $\text{Sd}' \mathbf{K}$, die gemeinsam mit s auf dem Rand eines Simplex liegen, unter f in den topologischen Abschluss der Sternumgebung $\text{st}(v)$ abgebildet werden, kann die zunächst nur auf den Ecken definierte Abbildung g affin linear auf die gesamte Sternumgebung $\text{st}(s)$ fortgesetzt werden, wobei deren Bild wieder in $\text{st}(v)$ liegt: $g(\text{st}(s)) \subseteq \text{st}(v)$. Da also beide Abbildungen f und g die Sternumgebung $\text{st}(s)$ in die konvexe Menge $\text{st}(v)$ abbilden, liegt für jeden Punkt x der Sternumgebung $\text{st}(s)$ auch die Verbindungsgerade zwischen den zwei Bildpunkten $f(x)$ und $g(x)$ innerhalb der Sternumgebung $\text{st}(v)$ und damit im Polyeder $|\mathbf{K}'|$. Auf Basis dieser geraden Verbindungswege zwischen den jeweils entsprechenden Bildpunkten $f(x)$ und $g(x)$ lässt sich schließlich wie

⁸ Andernfalls könnte man zu jeder natürlichen Zahl m einen Punkt y_m im Polyeder $|\mathbf{K}'|$ finden, so dass die offene Ballumgebung $U_{1/m}(y_m)$ in keiner Sternumgebung der Zerlegung \mathbf{K}' liegt. Da der Polyeder $|\mathbf{K}'|$ kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge. Deren Grenzwert y liegt in einer Sternumgebung $\text{st}(v)$ der Zerlegung \mathbf{K}' , so dass auch eine genügend klein gewählte Ballumgebung $U_{2\varepsilon}(y)$ in dieser Sternumgebung $\text{st}(v)$ liegt. Man wählt nun ein Folgenglied y_m , das im offenen Ball $U_\varepsilon(y)$ liegt. Für dieses Folgenglied folgt aufgrund der Dreiecksungleichung $U_\varepsilon(y_m) \subset U_{2\varepsilon}(y) \subset \text{st}(v)$, was einen Widerspruch zur Konstruktion der Folge darstellt.

gewünscht eine Homotopie zwischen den beiden Abbildungen f und g definieren: $h(x, t) = t \cdot f(x) + (1 - t) \cdot g(x)$ für $t \in [0, 1]$.

2.9 Als Resümee bleibt festzuhalten, dass wir die in Abschnitt 1.2 aufgezählten Eigenschaften des sogenannten Funktors der simplizialen Homologie einigermaßen explizit haben beschreiben und (hoffentlich) verdeutlichen konnten. Dabei fanden alle Zwischenschritte auf Ketten-Niveau innerhalb von endlichdimensionalen Vektorräumen statt. Topologische Sachverhalte, das heißt die Eigenschaften von geometrischen Objekten und ihren stetigen Transformationen, spiegeln sich auf diese Weise in algebraischen Objekten und ihre Homomorphismen wider⁹.

Im Hinblick auf die im dritten Teil behandelten Fixpunkt-Anwendungen wurde insbesondere die Konstruktion der durch eine stetige Abbildung f zwischen zwei simplizialen Polyeder-Zerlegungen \mathbf{K} und \mathbf{K}' induzierten Homomorphismen auf Homologie-Niveau $H_q(f): H_q(\mathbf{K}) \rightarrow H_q(\mathbf{K}')$ vergleichsweise ausführlich skizziert. Grundlage dieser Homomorphismen sind explizit konstruierbare Kettenabbildungen der Form

$$C_q(\mathbf{K}) \xrightarrow{\text{Unterteilungsoperator } Sd_q^r} C_q(Sd^r \mathbf{K}) \xrightarrow{\text{simpl. Approx. von } f} C_q(\mathbf{K}').$$

Die beschriebene Konstruktion macht auch deutlich, dass die Matrix einer solchen Kettenabbildung, wenn sie zu den Standard-Basen $S_q(\mathbf{K})$ und $S_q(\mathbf{K}')$ gebildet wird, ganzzahlige Koeffizienten besitzt.

Aufgrund der weitgehenden Ausklammerung der singulären Homologie-Theorie sind die hier entwickelten Werkzeuge streng genommen auf Polyeder beschränkt, wohl wissend, dass die singuläre Homologie-Theorie im n -dimensionalen euklidischen Raum \mathbb{R}^n insbesondere eine Erweiterung auf Mengen ermöglicht, die zu Polyedern homeomorph sind. Dies bewahrt uns bei den weiteren Überlegungen vor schwerfälligen Argumentationen, bei denen statt einer Hyperkugel jeweils ein Hypkerkubus oder ein Simplex der gleichen Dimension betrachtet werden muss.

⁹ Dabei sind Polyeder durch die Ketten-Vektorräume sogar bis auf Homeomorphie eindeutig charakterisiert, da die Randoperatoren die Zusammensetzung der Polyeder eindeutig widerspiegeln. In den Homologie-Gruppen wird aber nur ein kleiner Teil „verarbeitet“, der Rest wird de facto ausgeblendet.

3. Fixpunkte

3.1 Ein Beispiel für die Kraft der Methoden der algebraischen Topologie ist die homologische Fixpunkttheorie, die von Solomon Lefschetz bereits in den 1920er-Jahren begründet wurde. Zentraler Begriff der Fixpunkttheorie ist die sogenannte Lefschetz-Zahl, bei der es sich um eine Verallgemeinerung der Euler-Charakteristik handelt.

Die **Lefschetz-Zahl** lässt sich zu einer stetigen Selbstabbildung auf einem Polyeder mit der simplizialen Zerlegung \mathbf{K} definieren. Es ist

$$L(f, |\mathbf{K}|) = \sum_{q=0,1,\dots} (-1)^q \operatorname{tr}(f_q, H_q(\mathbf{K})),$$

wobei man im Spezialfall der identischen Abbildung die **Euler-Charakteristik** $\chi(|\mathbf{K}|) = L(\operatorname{id})$ erhält.

3.2 Bildet ein auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V definierter Endomorphismus φ einen Unterraum U in sich ab, dann gilt für die Spuren die Gleichung $\operatorname{tr}(\varphi, V/U) = \operatorname{tr}(\varphi, V) - \operatorname{tr}(\varphi, U)$. Der Beweis ist offensichtlich, wenn man eine Basis des Unterraumes U zu einer Basis des gesamten Vektorraumes V ergänzt und dann die Matrix $M(\varphi)$ der Abbildung φ zu dieser Basis hinschreibt:

$$\begin{pmatrix} M(\varphi_U) & * \\ 0 & M(\varphi_{V/U}) \end{pmatrix}$$

3.3 Diesen Sachverhalt wendet man nun auf die diversen Endomorphismen auf Ketten- und Homologie-Niveau an, die durch eine zur simplizialen Zerlegung \mathbf{K} definierte, stetige Selbstabbildung f induziert werden. Konkret wird die Formel auf zwei verschiedene Situationen angewendet, nämlich einerseits auf die Definition der Homologie-Gruppe $H_q(\mathbf{K}) = Z_q(\mathbf{K})/B_q(\mathbf{K})$ und andererseits auf die Definition der $(q-1)$ -Ränder $B_{q-1}(\mathbf{K}) = \partial_q(C_q(\mathbf{K})) \cong C_q(\mathbf{K})/Z_q(\mathbf{K})$. Damit ergibt sich (unter Verzicht auf eine notationsmäßige Unterscheidung zwischen Homomorphismen auf Ketten- und Homologie-Niveau)

$$\operatorname{tr}(f_q, H_q(\mathbf{K})) = \operatorname{tr}(f_q, C_q(\mathbf{K})) - \operatorname{tr}(f_{q-1}, B_{q-1}(\mathbf{K})) - \operatorname{tr}(f_q, B_q(\mathbf{K})).$$

Summiert man diese Formeln für die Werte $q = 0, 1, 2, \dots$ (mit $B_{-1}(\mathbf{K}) = 0$) alternierend auf, erhält man schließlich die sogenannte **Lefschetz-Hopf-sche Spurformel**

$$L(f, |\mathbf{K}|) = L(f, C_*(\mathbf{K})),$$

das heißt, die Lefschetz-Zahl kann auch auf Ketten-Niveau berechnet werden! Insbesondere folgt damit aufgrund der Anmerkung in Abschnitt 2.9, dass die Lefschetz-Zahl stets ganzzahlig ist.

Die einfachste Anwendung erhält man für die identische Abbildung: Ist \mathbf{K} eine simpliziale Zerlegung eines zur Kugeloberfläche S^2 homeomorphen (zweidimensionalen) Polyeders, dann folgt wegen

$$H_0(S^2) \cong \mathbb{Q}, H_1(S^2) = \{0\}, H_2(S^2) \cong \mathbb{Q} \quad (\text{siehe Fußnote 10})$$

und damit $\chi(S^2) = 2$ die Gleichung

$$2 = \dim C_2(\mathbf{K}) - \dim C_1(\mathbf{K}) + \dim C_0(\mathbf{K}) = \# \text{Flächen} - \# \text{Kanten} + \# \text{Ecken}.$$

Die hier nur für simpliziale Zerlegungen bewiesene Aussage ist allgemein als **Eulerscher Polyedersatz** bekannt.

3.4 Die Lefschetz-Hopfsche Spurformel ist der zentrale Punkt für das Verständnis von Lefschetz-Zahlen. So braucht man bei stetigen, fixpunktfreien Selbstabbildungen eines Polyeders die simpliziale Zerlegung nur so zu verfeinern, dass für jede Sternumgebung $\text{st}(s)$ einer Ecke s stets $f(\text{st}(s)) \cap \text{st}(s) = \emptyset$ gilt – möglich ist das aufgrund der Kompaktheit des endlich simplizial zerlegbaren Polyeders, auf dem die Abstandsfunktion $d(x) = \|f(x) - x\|$ ihr Minimum $d_{\min} > 0$ annimmt. Zu dieser simplizialen Zerlegung untersuchen wir nun, gegebenenfalls unter Verwendung einer nochmaligen, mehrfachen baryzentrischen Verfeinerung des Definitionsbereichs gemäß den Abschnitten 2.7 und 2.8, die Abbildungen

$$f_q : C_q(\mathbf{K}) \xrightarrow{\text{Unterteilungsoperator } Sd_q^r} C_q(Sd^r \mathbf{K}) \xrightarrow{\text{simpl. Approx. von } f} C_q(\mathbf{K}).$$

Weil alle Ecken $s \in S_0(\mathbf{K})$ die Eigenschaft $f(\text{st}(s)) \cap \text{st}(s) = \emptyset$ erfüllen, stehen in den Matrizen $M(f_q)$, die zu den Standardbasen $S_q(\mathbf{K})$ der Kettenvektorräume $C_q(\mathbf{K})$ definiert sind, in der Diagonale nur Nullen. Damit folgt für die Lefschetz-Zahl $0 = L(f, C_*(\mathbf{K})) = L(f, |\mathbf{K}|)$. Im Umkehrschluss besitzt daher jede stetige Selbstabbildung mit einer von 0 verschiedenen Lefschetz-Zahl mindestens einen Fixpunkt. Diese Aussage ist der **Lefschetzsche Fixpunktsatz**.

3.5 Insbesondere für den Fall eines abgeschlossenen Simplex X (oder einer dazu homeomorphen Menge wie einer abgeschlossenen n -dimensionalen Einheitskugel B^n) muss damit jede stetige Selbstabbildung mindestens einen Fixpunkt besitzen. Diese als **Brouwerscher Fixpunktsatz** bekannte Aussage folgt sofort aus der Tatsache, dass wegen $H_0(X) \cong \mathbb{Q}$ und $H_q(X) = \{0\}$ für $q \geq 1$ offensichtlich $L(f, X) = 1$ ist.

3.6 Ein Beispiel einer stetigen Abbildung ohne Fixpunkt ist die auf einer Sphäre $S^{n-1} = \partial B^n(0)$ definierte **Antipodenabbildung** $a(x) = -x$, deren Lefschetz-Zahl daher verschwinden muss: $L(a, S^{n-1}) = 0$.

Da man die Homologie-Gruppen der Sphäre S^{n-1} kennt beziehungsweise einfach berechnen kann¹⁰, nämlich

¹⁰ Wie zum Ende von Abschnitt 2.9 angemerkt, kann man von einer simplizialen Zerlegung \mathbf{K} des Randes eines n -dimensionalen Standardsimplex $\Delta(e_0, \dots, e_n) \cong S^{n-1}$ ausgehen. Entfernt man einen einzelnen $(n-1)$ -dimensionalen Simplex σ , erhält man eine Zerlegung \mathbf{K}' eines zur $(n-1)$ -dimensionalen Kugel homeomorphen Polyeders. Man findet nun

$$\begin{aligned} C_{n-1}(\mathbf{K}) &= C_{n-1}(\mathbf{K}') \oplus \mathbb{Q}\sigma \\ C_q(\mathbf{K}) &= C_q(\mathbf{K}') \quad \text{für } q < n-1 \\ Z_{n-1}(\mathbf{K}) &= Z_{n-1}(\mathbf{K}') \oplus \mathbb{Q} \cdot \sum_{\tau \in S_{n-1}(\mathbf{K})} \tau \\ Z_q(\mathbf{K}) &= Z_q(\mathbf{K}') \quad \text{für } q < n-1 \\ B_{n-1}(\mathbf{K}) &= B_{n-1}(\mathbf{K}') = \{0\} \\ B_{n-2}(\mathbf{K}) &= B_{n-2}(\mathbf{K}') \quad \text{wegen } \partial\sigma = -\partial \sum_{\tau \in S_{n-1}(\mathbf{K}) - \{\sigma\}} \tau \in B_{n-2}(\mathbf{K}') \\ B_q(\mathbf{K}) &= B_q(\mathbf{K}') \quad \text{für } q < n-2 \end{aligned}$$

$$H_0(S^{n-1}) \cong \mathbb{Q}, H_q(S^{n-1}) = \{0\} \text{ für } q = 1, \dots, n-1 \text{ und } H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Q},$$

erhält man daraus $0 = L(a, S^{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1} \text{tr}(a_{n-1}, H_{n-1}(S^{n-1}))$, so dass es sich bei der linearen Abbildung a_{n-1} auf dem eindimensionalen Vektorraum $H_{n-1}(S^{n-1})$ um eine Multiplikation mit dem Faktor $(-1)^n$ handelt.

3.7 Aber nicht nur für stetige Selbstabbildungen ohne Fixpunkte lassen sich auf diese Weise, das heißt unter Verwendung genügend feiner simplizialer Zerlegungen, Aussagen finden. Ist $\mathcal{F}(f)$ die Menge der Zusammenhangskomponenten der Fixpunktmenge einer stetigen Selbstabbildung f , dann kann außerhalb von Umgebungen dieser Fixpunktcomponenten wie in Abschnitt 3.4 vorgegangen werden. Auf diese Weise erhält man die sogenannte **Lefschetzsche Fixpunktformel**

$$L(f) = \sum_{F \in \mathcal{F}(f)} i(f, F),$$

wobei jeder **Fixpunktindex** $i(f, F)$ nur vom Verhalten der Abbildung f in einer Umgebung der betreffenden Fixpunktcomponente F abhängt. Diese Tatsache lässt sich wie folgt erklären: Wird die simpliziale Zerlegung in einer kleinen Umgebung *einer einzelnen* Fixpunktcomponente F verändert, dann ändern sich dadurch auf Ketten-Niveau die Spur-Beiträge im Bereich der *anderen* Fixpunktcomponenten nicht – immer vorausgesetzt, dass alle Zerlegungen fein genug sind. Aufgrund der Lefschetz-Hopfischen-Spurformel bleibt damit aber auch der einzig verbleibende Spur-Beitrag von derjenigen Fixpunktcomponente F unverändert, in deren Umgebung die simpliziale Zerlegung verändert wurde.

Wegen dieser allseitigen Invarianz können die Spur-Beiträge auf Ketten-Niveau zu einer sinnvollen, das heißt von der konkreten Zerlegung unabhängigen, Definition des Fixpunktindex verwendet werden. Die Lefschetzsche Fixpunktformel ist dann offensichtlich.

Es bleibt anzumerken, dass es häufig sinnvoll ist, innerhalb der Lefschetzschen Fixpunktformel Summanden zu bestimmten Fixpunktcomponenten zusammenzufassen – beispielsweise von denen, die am Rand liegen.

3.8 Wir untersuchen nun den Sonderfall, wenn eine stetige Selbstabbildung f eines Polyeders im \mathbb{R}^n mit einer simplizialen Zerlegung K im Inneren eines n -dimensionalen Simplex einen isolierten Fixpunkt x_0 besitzt¹¹. Zur Vereinfachung, aber ohne Einschränkung der Allgemeinheit, können wir $x_0 = 0$ annehmen. Zunächst kann eine kleine, abgeschlossene (Hyper-)Kugel $B_R(0)$ gefunden werden, in der 0 der einzige Fixpunkt ist. Um eine lokale Charakterisierung des Fixpunkt-Indexes $i(f, 0)$ zu finden, werden wir für die Kugel $B_R(0)$ eine stetige Selbstabbildung g definieren, die in einer Umgebung des Fixpunktes 0 mit f übereinstimmt:

Wir wählen zunächst eine weitere abgeschlossene Kugel $B_r(0)$ mit $r < R/3$ und $f(B_{3r}(0)) \subseteq B_R(0)$. Nun wird die Abbildung g wie folgt konstruiert:

- Innerhalb der Kugel $B_r(0)$ wird die Abbildung g übereinstimmend mit der Abbildung f definiert:

¹¹Natürlich gelten die Resultate auch für eine dazu äquivalente Situation, die zum hier beschriebenen Szenario homeomorph beziehungsweise – für den letzten Teil des Abschnitts – sogar diffeomorph ist.

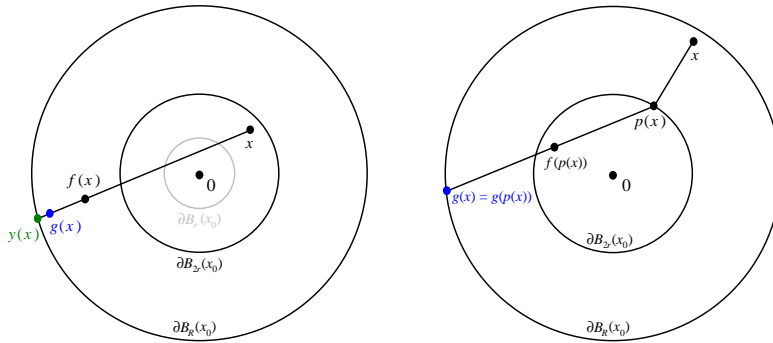
$$g(x) = f(x)$$

- Innerhalb der Hohlkugel $B_{2r}(0) - B_r(0)$ wird die Abbildung g unter Verwendung der Verbindungsgeraden zwischen den beiden (voneinander verschiedenen) Punkten x und $f(x)$ definiert. Dazu wird die Gerade auf Seiten von $f(x)$ bis zum mit $y(x)$ bezeichneten Schnittpunkt mit der Sphäre $\partial B_R(x_0)$ verlängert (siehe linkes Teilbild). Dann definiert man zum Zwecke der „stufenlosen Interpolation“ zwischen $f(x)$ auf $\partial B_r(0)$ und $y(x)$ auf $\partial B_{2r}(0)$

$$g(x) = \left(2 - \frac{\|x\|}{r}\right)f(x) + \left(\frac{\|x\|}{r} - 1\right)y(x).$$

- In der Hohlkugel $B_R(0) - B_{2r}(0)$, dessen topologischen Abschluss wir mit H bezeichnen, definiert man die Abbildung g dadurch, dass ein Punkt $x \in B_R(0) - B_{2r}(0)$ zunächst auf $\partial B_{2r}(0)$ projiziert wird und dann mittels dieser Projektion $p(x)$ durch g weiter abgebildet wird (siehe rechtes Teilbild):

$$g(x) = g(p(x))$$



Aufgrund ihrer Konstruktion kann die Abbildung $g: B_R(0) \rightarrow B_R(0)$ abgesehen von 0 nur Fixpunkte auf dem Rand $\partial B_R(0)$ besitzen. Damit gilt gemäß Abschnitt 3.6

$$\begin{aligned} 1 &= L(g, B_R(0)) = i(g, 0) + \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}(g) \\ F \subseteq \partial B_R(x_0)}} i(g, F) \\ &= i(f, 0) + \sum_{F \in \mathcal{F}(g_H)} i(g_H, F) = i(f, 0) + L(g_H, H) \\ &= i(f, 0) + L(p \circ g_{\partial B_{2r}(0)}, \partial B_{2r}(0)) \\ &= i(f, 0) + 1 + (-1)^{n-1} \text{tr}((p \circ g_{\partial B_{2r}(0)})_{n-1}, H_{n-1}(\partial B_{2r}(0))), \end{aligned}$$

wobei die vorletzte Identität auf der Homotopie-Äquivalenz zwischen der Hohlkugel H und der Sphäre $\partial B_{2r}(0)$ beruht. Schließlich verdanken wir die letzte Gleichheit unserer Kenntnis über die Homologie-Gruppen der Sphäre $\partial B_{2r}(0) \cong S^{n-1}$, nämlich

$$H_0(S^{n-1}) \cong \mathbb{Q}, H_q(S^{n-1}) = \{0\} \text{ für } q = 1, \dots, n-1 \text{ und } H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Q}.$$

Damit erkennen wir auch, dass es sich bei der Spur einfach um den Faktor handelt, mit dem die Homologie-Klassen des eindimensionalen Vektorraumes $H_{n-1}(\partial B_{2r}(0))$ durch den Homomorphismus multipliziert werden. Diese

ganze Zahl wird auch als **Abbildungsgrad** der induzierenden Abbildung $p \circ g$ bezeichnet¹².

In der nun vorliegenden Formel für den Fixpunktindex

$$i(f, 0) = (-1)^n \operatorname{tr} \left((p \circ g|_{\partial B_{2r}(0)})_{n-1}, H_{n-1}(\partial B_{2r}(0)) \right)$$

lässt sich die Abbildung $p \circ g$ noch durch eine homotopie-äquivalente Abbildung in standardisierter Form ersetzen: Für $x \in \partial B_{2r}(0)$ gilt nämlich

$$g(x) = x - \frac{x-f(x)}{\|x-f(x)\|} l(x)$$

mit einem geeigneten Skalierungsfaktor $l(x) \in [R-2r, R+2r]$. Verglichen mit der leicht modifizierten Funktion

$$G(x) = -R \cdot h(x) \quad \text{mit } h(x) = \frac{x-f(x)}{\|x-f(x)\|}$$

ergibt sich für $x \in \partial B_{2r}(0)$

$$\|G(x) - g(x)\| \leq \|x\| + 2r \leq 4r.$$

Für einen genügend kleinen inneren Radius $r > 0$ sind damit die beiden Funktionen $g, G: \partial B_{2r}(0) \rightarrow \partial B_R(0)$ homotop zueinander. Dabei kann die Homotopie ähnlich wie im Approximationssatz konstruiert werden – nun aber auf der Basis von geodätischen Verbindungslinien. Damit sind auch die beiden Abbildungen $p \circ g$ und $p \circ G: \partial B_{2r}(0) \rightarrow \partial B_{2r}(0)$ homotop zueinander, wobei sich die Werte der Funktion $p \circ G$ durch die explizite Formel

$$(p \circ G)(x) = -2r \cdot h(x)$$

ergeben. Unter Verwendung der Antipodenabbildung aus Abschnitt 3.6 erhält man

$$\begin{aligned} i(f, 0) &= (-1)^n \operatorname{tr}(a_{n-1} \circ h_{n-1}, H_{n-1}(S^{n-1})) \\ &= \operatorname{tr}(h_{n-1}, H_{n-1}(S^{n-1})). \end{aligned}$$

Wegen $f(0) = 0$ ergibt sich, sofern die Abbildung f in 0 differenzierbar ist,

$$f(x) = D_f(0)x + d(x)$$

mit der Funktionalmatrix $D_f(0)$ sowie $d(x)/\|x\| \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$. Daher erhält man

$$x - f(x) = (\operatorname{id} - D_f(0))(x) - d(x),$$

¹²Der Absolutbetrag des Abbildungsgrades lässt sich als die Anzahl der Urbilder interpretieren, die jeder Punkt des Bildbereichs selbst nach einer homotopen Veränderung der Abbildung auf jeden Fall besitzt. Das Vorzeichen des Abbildungsgrades ergibt sich aus der Orientierung der Abbildung.

Beispielsweise ist der Abbildungsgrad einer konstanten Abbildung gleich 0, für die Identität ergibt sich 1, und die Antipodenabbildung besitzt bei geraden Dimensionen den Abbildungsgrad 1 und sonst -1 .

so dass man für genügend kleine Radien $r > 0$ den Abbildungsgrad auf Basis der linearen Abbildung $\text{id} - D_f(0)$ bilden kann, die zur Abbildung h homotop ist:

$$h(x) = \frac{(\text{id} - D_f(0))x}{\|(\text{id} - D_f(0))x\|} - \frac{d(x)}{\|x\|} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{(\text{id} - D_f(0))x}{\|(\text{id} - D_f(0))x\|}.$$

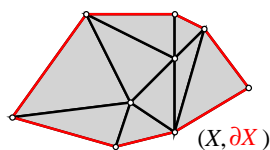
Ist $\text{id} - D_f(0)$ invertierbar, so ist deren Abbildungsgrad, der selbst und dessen Kehrwert ganzzahlig sein muss, gleich ± 1 ist, wobei sich das Vorzeichen aus $\det(\text{id} - D_f(x_0))$ ergibt¹³.

3.9 Wir wollen nun noch eine weitere Situation untersuchen, wie sie bei Mannigfaltigkeiten mit Rand auftaucht. Da der dafür notwendige technische Apparat hier eigentlich nicht entwickelt wurde, beschränken wir uns auf sogenannte Pseudomannigfaltigkeiten mit Rand. Bei einer solchen n -dimensionalen **Pseudomannigfaltigkeit** mit Rand handelt es sich um einen Polyeder mit einer simplizialen Zerlegung K , dessen Simplexe maximal die Dimension n besitzen und darüber hinaus die folgenden Eigenschaften aufweisen:

- Jeder $(n-1)$ -dimensionale Simplex aus K ist Rand von genau einem oder zwei n -dimensionalen Simplexen aus K .
- Zwei n -dimensionale Simplexe hängen über einen „Weg-Kette“ n -dimensionaler Simplexe zusammen, das heißt, in dieser „Weg-Kette“ besitzen zwei aufeinanderfolgende Simplexe jeweils einen gemeinsamen Randsimplex der Dimension $n-1$.
- Jeder Simplex der Zerlegung K liegt auf dem Rand eines n -dimensionalen Simplex.

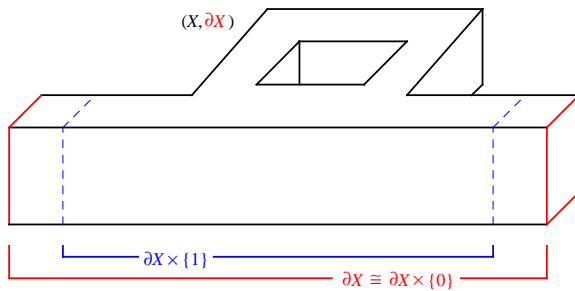
Typischerweise ergibt sich eine solche Pseudomannigfaltigkeit mit Rand aus den kombinatorischen Daten, die man erhält, wenn man eine Mannigfaltigkeit mit Rand in kleine, zu Standardsimplexen homeomorphen Stücke zerlegt.

Die beiden nächsten Abbildungen zeigen je eine zweidimensionale Pseudomannigfaltigkeit mit Rand, wobei die zweite im \mathbb{R}^3 eingebettet ist, ohne dass die Zerlegung explizit dargestellt ist.



Untersucht werden soll nun auf einer solchen Pseudomannigfaltigkeit mit Rand $(X, \partial X)$ eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow X$, die den Rand in sich abbildet: $f(\partial X) \subseteq \partial X$. Außerdem wird noch vorausgesetzt, dass keine Zusammenhangskomponente der Fixpunktmenge gleichzeitig sowohl innere Punkte als auch Randpunkte enthält. Das heißt, dass eine geeignet gewählte „Zylinder“-Umgebung des Randes $U \cong \partial X \times [0, 1]$ keine Fixpunkte außerhalb des Randes $\partial X \cong \partial X \times \{0\}$ enthält.

¹³Die Menge der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen zerfällt in zwei Zusammenhangskomponenten, die durch das Vorzeichen ihrer Determinante charakterisiert werden. Daher sind zwei lineare Abbildungen mit übereinstimmenden Determinanten-Vorzeichen zueinander homotop, so dass sie auch übereinstimmende Abbildungsgrade besitzen. Dass es wirklich lineare Abbildungen mit Abbildungsgrad -1 gibt, erkennt man aus einer Untersuchung der Abbildung zur Diagonalmatrix $\text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$.



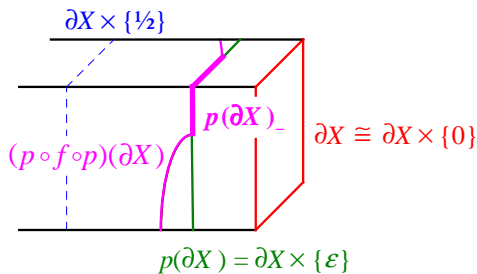
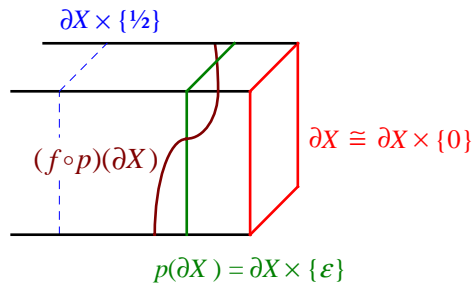
Aufgrund der gemachten Annahmen erhält man innerhalb der Lefschetz-schen Fixpunktformel die Aufspaltung

$$L(f) = \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}(f) \\ F \cap \partial X = \emptyset}} i(f, F) + \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}(f) \\ F \subseteq \partial X}} i(f, F).$$

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass für Fixpunkt-komponenten im Inneren zum Teil Berechnungsmöglichkeiten zur Verfügung stehen. Daher soll hier der zweite Summand näher untersucht werden. Dazu definieren wir zunächst für eine genügend klein gewählte Zahl $\varepsilon \in (0, 1/4)$ mit $f(\partial X \times [0, \varepsilon]) \subset \partial X \times [0, 1/2]$ innerhalb dieser „Zylinder“-Umgebung die nach innen gerichtete Projektion

$$p: \partial X \times [0, 1] \rightarrow \partial X \times [0, 1], \quad p(x, t) = (x, \varepsilon),$$

die sich mittels der Identität stetig auf ganz X fortsetzen lässt. Offensichtlich ist die Abbildungen p homotop zur Identität.



Die Abbildung $p \circ f \circ p$ kann in der Umgebung $\partial X \times [0, 1]$ des Randes Fixpunkte nur im Niveau $p(\partial X) = \partial X \times \{\varepsilon\}$ besitzen und dort auch nur in der Menge $p(\partial X)_-$ solcher Punkte (x, ε) mit $f(x, \varepsilon) = (y, \delta)$ und $\delta < \varepsilon$, das heißt wo der Randabstand echt verkleinert wird (in der Menge $p(\partial X)_0$ der Punkte, deren Randabstand unter f unverändert bleibt, kann nach der anfänglich gemachten Annahme kein Fixpunkt existieren). Wir erhalten daher

$$\sum_{\substack{F \in \mathcal{F}(f) \\ F \subseteq \partial X}} i(f, F) = \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}(p \circ f \circ p) \\ F \subseteq p(\partial X)_-}} i(p \circ f \circ p, F).$$

Um die Randbeiträge mittels einer auf dem Rand definierten Abbildung charakterisieren zu können, definieren wir noch eine zum Rand gerichtete Projektion

$$b: \partial X \times [0, 1/2] \rightarrow \partial X \times [0, 1], \quad b(x, t) = (x, \varepsilon),$$

die sich ebenfalls außerhalb von $X - (\partial X \times [0, 1])$ durch die Identität (sowie auf $\partial X \times [1/2, 1]$ durch geeignete Interpolation) zu einer stetigen Abbildung auf ganz X fortsetzen lässt. Wir wollen nun noch untersuchen, was beim Übergang von der Abbildung $p \circ f \circ p$ zur homotopen Abbildung $b \circ p \circ f \circ p$ passiert. Dabei können neue Fixpunkte entstehen, nämlich einerseits außerhalb von $p(\partial X)$ und andererseits in $p(\partial X)$ – dort allerdings nur innerhalb der Menge $p(\partial X)_+$ solcher Punkte, deren Randabstand unter f vergrößert wird. Damit bleiben aber die Beiträge zur Lefschetz-Zahl für die innerhalb von $p(\partial X)_-$ gelegenen Fixpunktcomponenten unverändert:

$$\sum_{\substack{F \in \mathcal{F}(f) \\ F \subseteq \partial X}} i(f, F) = \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}(b \circ p \circ f \circ p) \\ F \subseteq p(\partial X)_-}} i(b \circ p \circ f \circ p, F)$$

Dabei ist die Abbildung $b \circ p \circ f: p(\partial X) \rightarrow p(\partial X)$ homotop zu einer auf dem Rand ∂X definierten Selbstabbildung. Es ist allerdings anzumerken, dass die Konstruktion dieser Abbildung nicht eindeutig bestimmt ist, sondern von der Auswahl der Abbildung p abhängt. Die solchermaßen entstehende Mehrdeutigkeit kann sogar Anzahl und Indizes der zu berücksichtigenden, das heißt in $p(\partial X)_-$ gelegenen, Fixpunktcomponenten verändern.