Jörg Bewersdorff

Algebra für Einsteiger

Von der Gleichungsauflösung zur Galois-Theorie

2. Auflage

Einführung

Math is like love; a simple idea,
but it can get complicated.
R. Drabek

Dieses Buch handelt von einem klassischen Problem der Algebra und seiner Geschichte. Beschrieben wird die Suche nach Lösungsformeln für Polynomgleichungen in einer Unbekannten und wie die dabei hinzunehmenden Misserfolge letztlich zu Erkenntnissen ganz anderer Art führten und zwar zu solchen mit höchst grundlegender Bedeutung.

Schauen wir uns den Gegenstand, der über drei Jahrhunderte viele der besten Mathematiker beschäftigte, schon einmal kurz an. Sie, verehrte Leserin beziehungsweise verehrter Leser, erinnern sich bestimmt noch an quadratische Gleichungen wie

$$x^2 - 6x + 1 = 0$$

und auch noch an die Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

zur Lösung der „allgemeinen“ quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0.$$

Angewendet auf das Beispiel erhält man die beiden Lösungen

$$x_1 = 3 + 2\sqrt{2} \quad \text{und} \quad x_2 = 3 - 2\sqrt{2}\,.$$

Ist man an numerischen Werten interessiert, so lassen sich aus diesen beiden Ausdrücken mit Hilfe eines Taschenrechners – oder wüssten Sie noch, wie man eine Wurzel manuell berechnet? – problemlos die Dezimaldarstellungen x_1 = 5,828427... und x_2 = 0,171573... bestimmen. Auch eine Überprüfung, dass x_1 und x_2 tatsächlich Lösungen der Gleichung sind, lässt sich auf Basis der numerischen Werte mit einem Taschenrech-

ner schnell bestätigen. Ein Skeptiker, der ganz sicher ausschließen möchte, dass die Werte nicht nur annähernde Lösungen sind, sondern die exakten, muss selbstverständlich die gefundenen Wurzelausdrücke selbst in die Gleichung „einsetzen“ und nachrechnen, dass das quadratische Polynom $x^2 - 6x + 1$ tatsächlich an den Stellen $x = x_1$ und $x = x_2$ „verschwindet“, das heißt den Wert 0 annimmt.

Die Auflösung von Gleichungen höherer Grade

Wie kubische Gleichungen wie zum Beispiel

$$x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$$

mittels einer vergleichbaren Formel zu lösen sind, ist weit weniger bekannt. Zwar wurde eine solche Lösungsformel bereits 1545 von Cardano (1501-1576) in seinem Buch *Ars magna* erstmals veröffentlicht, jedoch besitzt sie heute in der numerischen Praxis kaum noch eine Bedeutung. In einem Zeitalter, in dem die Rechenleistung von Computern de facto unbegrenzt zur Verfügung steht, ist eine explizite Formel bei praktischen Anwendungen nämlich entbehrlich, da es bei solchen völlig reicht, die Lösungen numerisch zu bestimmen. Und dafür gibt es, und zwar allgemein auch für jede andere Gleichung in einer Unbekannten verwendbar, diverse Näherungsverfahren, die „iterativ“, das heißt schrittweise, die gesuchten Lösungen immer genauer berechnen. Abgebrochen wird ein solches Verfahren dann, wenn eine im Hinblick auf die gewünschte Anwendung genügende Genauigkeit erreicht ist. Iterative Näherungsverfahren sind aber dann ungeeignet, wenn nicht nur der numerische Wert einer Lösung, für die letzte Gleichung beispielsweise x_1 = 3,847322..., sondern sogar der „exakte“ Wert

$$x_1 = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$$

bestimmt werden soll. Abgesehen davon, dass eine solche Wurzeldarstellung eine gewisse Ästhetik beinhaltet, ist eine rein numerisch verifizierte Übereinstimmung sicher dann nicht ausreichend, wenn daraus mathematische Erkenntnisse und Prinzipien abgeleitet werden sollen:

Nehmen wir zum Beispiel die drei aufgrund numerischer Berechnungen zu vermutenden Identitäten

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \tfrac{1}{3}\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{12}\right),$$

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768744$$

und

$$\cos\frac{2\pi}{17} = -\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{17}+\frac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \frac{1}{4}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\,.$$

Ohne hier auf Details eingehen zu wollen, erscheint es bereits a priori durchaus plausibel, dass sich hinter diesen drei Identitäten – wenn sie überhaupt korrekt sind – mathematische Gesetzmäßigkeiten verbergen. Eine Prüfung, ob die Gleichungen tatsächlich stimmen oder vielleicht nur das Resultat einer zufälligen Nahezu-Übereinstimmung sind, ist also unumgänglich[1].

Nun aber wieder zurück zu Cardano: Außer für Gleichungen dritten Grades veröffentlichte er in seiner *Ars magna* auch eine allgemeine Lösungsformel für biquadratische Gleichungen, wie Gleichungen vierten Grades meist bezeichnet werden. Mit einer solchen Formel lässt sich beispielsweise zur Gleichung

---

1 Es sei bereits hier verraten, dass die erste und die dritte Identität tatsächlich stimmen. Die erste Identität wurde von dem indischen Mathematiker Ramanujan (1887-1920) entdeckt und kann elementar nachgeprüft werden. Die dritte Identität, die in Kapitel 7 noch erörtert werden wird, beinhaltet sogar einen Beweis, dass das regelmäßige Siebzehneck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Auch eine Konstruktionsmethode kann aus der Gleichung abgeleitet werden.
Die zweite Gleichung stimmt nicht exakt; vielmehr ist der tatsächliche Wert der linken Seite gleich

262537412640768743,9999999999992501...

Allerdings ist die Nahezu-Identität auch nicht unbedingt als „Zufall" zu werten. Vielmehr liegen ihr tief liegende zahlentheoretische Beziehungen zugrunde. Siehe dazu Philip J. Davies, *Are there coincidences in mathematics?*, American Mathematical Monthly, **88** (1981), S. 311-320.

$$x^4 - 8x + 6 = 0$$

die Lösung

$$x_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\Big(\sqrt{\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}} + \sqrt{-\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{4-2\sqrt{2}} + 2\sqrt{2\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + 2\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} - 2}}\Big)$$

finden.

Mit der fast gleichzeitigen Entdeckung von Auflösungsformeln für Gleichungen dritten und vierten Grades stellte sich natürlich fast zwangsläufig die Frage, wie sich auch Gleichungen höherer Grade auflösen lassen. Um dies zu bewerkstelligen, wurden in der Zeit nach Cardano insbesondere die Techniken, die bei Gleichungen bis zum vierten Grade eine Herleitung von Lösungsformeln erlauben, systematisiert, um sie dann auf Gleichungen fünften Grades übertragen zu können. Trotz einer fast dreihundertjährigen Suche blieb der Erfolg aber aus, so dass immer mehr Zweifel aufkamen, ob das Ziel überhaupt erreicht werden könne.

Ein endgültiger Abschluss gelang erst 1826 Niels Henrik Abel (1802-1829), der zeigte, dass es für Gleichungen fünften oder höheren Grades keine allgemeine Auflösungsformel geben kann, die ausschließlich arithmetische Operationen und Wurzeln beinhaltet. Im Kern besteht Abels Beweis darin, dass für die Zwischenwerte einer hypothetisch als existent angenommenen Auflösungsformel Schritt für Schritt Symmetrien in Bezug auf die verschiedenen Lösungen nachgewiesen werden, wodurch sich letztlich ein Widerspruch ergibt.

Galois-Theorie

Eine Verallgemeinerung von Abels Ansätzen, die auch auf spezielle Gleichungen anwendbar ist, fand wenige Jahre später der damals erst zwanzigjährige Evariste Galois (1811-1832). Unter dramatischen Umständen, nämlich am Vorabend eines für ihn tödlich verlaufenden Duells, fasste er die von ihm in den Vormonaten gefundenen Ergebnisse in einem

Brief zusammen. Darin enthalten sind Kriterien, die es erlauben, jede einzelne Gleichung darauf zu untersuchen, ob ihre Lösungen mit Hilfe von Wurzelausdrücken dargestellt werden können oder nicht. So können beispielsweise die Lösungen der Gleichung fünften Grades

$$x^5 - x - 1 = 0$$

nicht durch geschachtelte Wurzelausdrücke mit rationalen Radikanden dargestellt werden, hingegen ist bei der Gleichung

$$x^5 + 15x - 44 = 0$$

zum Beispiel

$$x_1 = \sqrt[5]{-1+\sqrt{2}} + \sqrt[5]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[5]{3-2\sqrt{2}} + \sqrt[5]{-1-\sqrt{2}}$$

eine Lösung.

Noch weit wichtiger als solche Aussagen ist Galois' Vorgehensweise, die damals unorthodox, wenn nicht gar revolutionär war, heute aber in der Mathematik sehr gebräuchlich ist. Galois stellte nämlich eine Beziehung her zwischen zwei gänzlich unterschiedlichen Typen von Objekten und deren Eigenschaften. Dabei gelang es ihm, die Eigenschaften eines eigentlich zu untersuchenden Objekts, nämlich die Auflösbarkeit einer gegebenen Gleichung und des gegebenenfalls zu beschreitenden Lösungsweges, aus den Eigenschaften des dazu korrespondierenden Objekts abzulesen. Aber nicht nur das Prinzip dieser Vorgehensweise befruchtete die weitere Entwicklung der Mathematik. Auch die von Galois erschaffene Klasse von Objekten, mit denen er gegebene Gleichungen indirekt untersuchte – es handelt sich um so genannte endliche Gruppen – wurden zu einem vielfältige Anwendungen erlaubenden Gegenstand der Mathematik. Zusammen mit ähnlich konzipierten Objektklassen bilden sie heute das begriffliche Fundament der Algebra, und auch die anderen Teildisziplinen der Mathematik haben seit dem Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts einen vergleichbaren Aufbau erhalten.

Das von Galois zu einer gegebenen Gleichung konstruierte Objekt, heute Galois-Gruppe genannt, kann auf Basis der zwischen den Lösungen in Form von Identitäten wie beispielsweise $x_1^2 = x_2 + 2$ bestehenden Beziehungen definiert werden. Konkret besteht die Galois-Gruppe aus Um-

nummerierungen der Lösungen. Dabei gehört eine solche Umnummerierung genau dann zur Galois-Gruppe, wenn jede zwischen den Lösungen bestehende Beziehung durch diese Umnummerierung in eine ebenfalls bestehende Beziehung transformiert wird. So kann für den Fall der beispielhaft angeführten Beziehung $x_1^2 = x_2 + 2$ die der Vertauschung der beiden Lösungen x_1 und x_2 entsprechende Umnummerierung nur dann zur Galois-Gruppe gehören, wenn auch die Identität $x_2^2 = x_1 + 2$ erfüllt ist. Letztlich entspricht daher jede zur Galois-Gruppe gehörende Umnummerierung einer Symmetrie, die zwischen den Lösungen der Gleichungen besteht. Anzumerken bleibt, dass die Galois-Gruppe trotzdem auch ohne Kenntnis der Lösungen bestimmt werden kann.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*
A	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*
B	*B*	*C*	*D*	*E*	*A*	*J*	*F*	*G*	*H*	*I*
C	*C*	*D*	*E*	*A*	*B*	*I*	*J*	*F*	*G*	*H*
D	*D*	*E*	*A*	*B*	*C*	*H*	*I*	*J*	*F*	*G*
E	*E*	*A*	*B*	*C*	*D*	*G*	*H*	*I*	*J*	*F*
F	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
G	*G*	*H*	*I*	*J*	*F*	*E*	*A*	*B*	*C*	*D*
H	*H*	*I*	*J*	*F*	*G*	*D*	*E*	*A*	*B*	*C*
I	*I*	*J*	*F*	*G*	*H*	*C*	*D*	*E*	*A*	*B*
J	*J*	*F*	*G*	*H*	*I*	*B*	*C*	*D*	*E*	*A*

Bild 1 Die tabellarisch dargestellte Galois-Gruppe zur Gleichung $x^5 - 5x + 12 = 0$, deren Auflösbarkeit mit Wurzelausdrücken aus dieser Tabelle mittels rein kombinatorischer Überlegungen nachgewiesen werden kann. Die Gleichung wird in Kapitel 9, Abschnitt 9.17 näher untersucht. Bei einer Gleichung fünften Grades, deren Lösungen nicht durch Wurzelausdrücke darstellbar sind, wird die Galois-Gruppe übrigens durch wesentlich größere Tabellen mit Größen von 60×60 oder 120×120 repräsentiert.

Elementar, wenn auch nicht unbedingt elegant, kann die Galois-Gruppe durch eine endliche Tabelle beschrieben werden. Dabei handelt es sich um die so genannte Gruppentafel, die als eine Art Einmaleins-Tabelle verstanden werden kann, innerhalb der jedes Resultat einer Hintereinanderausführung von zwei zur Galois-Gruppe gehörenden Umnummerierungen tabelliert ist (ein Beispiel zeigt Bild 1). Wesentlich für die Galois-Gruppe ist, dass sie – beziehungsweise die ihr entsprechende Tabelle – stets die Information darüber enthält, ob und gegebenenfalls wie die zugrunde liegende Gleichung durch Wurzelausdrücke auflösbar ist. Zwar ist die diesbezügliche Prüfung im konkreten Anwendungsfall nicht unbedingt einfach, jedoch kann sie nach festem Schema immer in einer endlichen Zahl von Schritten erfolgen.

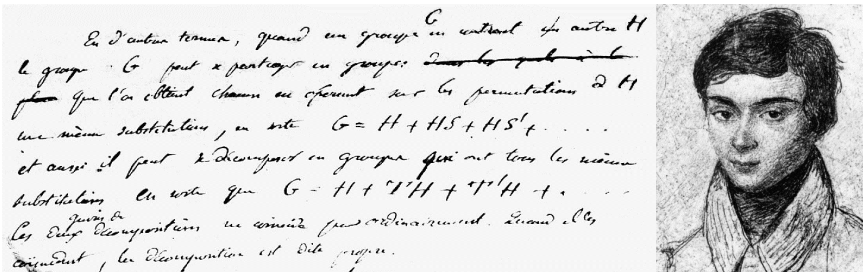

Bild 2 Evariste Galois und ein Ausschnitt aus seinem letzten Brief. In dieser Passage beschreibt er, wie eine Gruppe G mittels einer Untergruppe H in Nebenklassen zerlegt werden kann (siehe Abschnitt 10.4).

Üblicherweise werden Galois' Ideen heute in Lehrbüchern deutlich abstrakter beschrieben. Unter Verwendung der schon erwähnten Klassen algebraischer Objekte gelang es nämlich zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts, auch die so genannte Galois-Theorie neu zu formulieren und zwar in einer Weise, bei der bereits die Problemstellungen mittels solcher Objekte beschrieben werden. Konkret werden die Eigenschaften von Gleichungen und deren Lösungen zunächst mittels ihnen *unmittelbar* zugeordneten Zahlbereichen charakterisiert, deren gemeinsame Eigenschaft es ist, dass bei ihnen die vier arithmetischen Grundoperationen nicht herausführen – es handelt sich um so genannte Körper: Ausgegangen wird bei einer gegebenen Gleichung

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$$

minimal von dem Zahlbereich, der aus all denjenigen Resultaten wie

$$\frac{a_2}{a_0} - a_1^2 + a_0$$

besteht, die man aus den Koeffizienten der Gleichung mittels hintereinander geschalteter Grundrechenarten erhalten kann. Einen vergrößerten Zahlbereich, der für das Studium der gegebenen Gleichung äußerst bedeutsam ist, erhält man, wenn man außer den Koeffizienten ebenso die Lösungen x_1, x_2, ... der Gleichung bei der Bildung der Rechenausdrücke zulässt. Dieser Zahlbereich wird also gebildet von allen Werten, die durch Rechenausdrücke der Form

$$\frac{a_0}{a_2}x_1^2 - a_2x_2 + a_1$$

darstellbar sind. Ist es nun sogar möglich, die Lösungen der gegebenen Gleichung durch geschachtelte Wurzelausdrücke darzustellen, so lassen sich natürlich weitere Zahlbereiche dadurch erzeugen, dass man bei den Rechenausdrücken die Koeffizienten der Gleichung sowie Teile der verschachtelten Wurzeln zulässt. Jede Gleichungsauflösung entspricht damit ineinander verschachtelten Zahlbereichen und diese lassen sich – so der Hauptsatz der Galois-Theorie – allesamt durch eine Analyse der Galois-Gruppe auffinden. Daher beantwortet bereits eine solche, rein auf qualitativem Niveau durchgeführte Analyse der Galois-Gruppe die Frage danach, ob die Lösungen in Form verschachtelter Wurzelausdrücke dargestellt werden können.

Die so zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts erstmals erreichte und danach im Wesentlichen unverändert beibehaltene Abstraktion markiert zugleich das Ende eines historischen Prozesses, während dessen sich das Interesse an den hier beschriebenen Problemen mehrmals verlagerte: Stand für Cardano und seine Zeitgenossen die Suche nach konkreten Lösungen von explizit gestellten Aufgaben mittels allgemein funktionierender Verfahren im Mittelpunkt, so verschob sich dieser Blickwinkel schon bald und rückte dabei das Interesse an prinzipiellen Eigenschaften von Gleichungen in den Mittelpunkt. Beginnend mit Galois, konsequent aber

erst seit dem Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts, hat sich der Fokus nochmals drastisch verschoben. Nun bilden die abstrakten Klassen von Objekten wie Gruppen und Körper den Ausgangspunkt, auf deren Basis sich eine Vielzahl von Problemen formulieren lassen[2], darunter natürlich auch jene, die ursprünglich einmal die Kreierung dieser Objektklassen inspiriert haben.

Über dieses Buch

Um einen möglichst breiten Leserkreis – vorausgesetzt werden nur Kenntnisse, wie sie an einer höheren Schule vermittelt werden – erreichen zu können, wurde bewusst von einer Darstellung abgesehen, wie sie im Hinblick auf Allgemeinheit, Exaktheit und Vollständigkeit in Standard-Lehrbüchern üblich und angebracht ist. Im Blickpunkt stehen vielmehr Ideen, Begriffe und Techniken, die so weit vermittelt werden, dass eine konkrete Anwendung, aber auch die Lektüre weiterführender Literatur, möglich sein sollte. Bei einer solchen Ausrichtung haben technisch aufwändige Beweise eigentlich keinen Platz. Andererseits bilden Beweise fraglos das Rückgrat einer ernsthaften Auseinandersetzung mit mathematischen Sachverhalten. Im Sinne eines Kompromisses sind daher schwierige Beweise außer im letzten Kapitel aus dem Haupttext ausgegliedert, so dass Lücken vermieden werden und trotzdem der Textfluss nicht unterbrochen wird.

Deutlichen Wert gelegt wird auf die historische Entwicklung und zwar zum einen, weil der Aufschwung der Mathematik in den letzten Jahrhun-

---

[2] Dabei ergeben sich insbesondere auch für die moderne Informationstechnologie äußerst wichtige Anwendungen im Bereich der Kryptographie wie zum Beispiel die 1978 erstmals realisierten Public-Key-Codes. Bei diesen asymmetrischen Verschlüsselungsverfahren wird der Schlüssel zur Codierung veröffentlicht, ohne dass dadurch ein Sicherheitsrisiko in Form einer für Unbefugte möglichen Decodierung entsteht. Als mathematische Basis für solche Public-Key-Verschlüsselungsverfahren wie RSA und ElGamal dienen Rechenoperationen in speziellen algebraischen Objekten mit sehr großer, aber endlicher Elemente-Anzahl (konkret verwendet werden Restklassenringe sowie zu endlichen Körpern definierte elliptische Kurven). Eine Einführung in diese Thematik gibt Johannes Buchmann, *Einführung in die Kryptographie*, Berlin 2001.

derten weit weniger bekannt ist als derjenige der Naturwissenschaften, zum anderen, weil es durchaus spannend sein kann, persönlichen Irrtum und Erkenntnisgewinn der zeitrafferartig verkürzten Entwicklung zuordnen zu können. Und außerdem bietet eine dem historischen Weg der Erkenntnis folgende Darstellung den Vorteil, so manche mathematische Abstraktion als natürlichen Abschluss von Einzeluntersuchungen erscheinen zu lassen, so dass der Eindruck einer unmotiviert am Anfang stehenden Definition mit dem scheinbaren Charakter einer vom Himmel gefallenen Beliebigkeit erst gar nicht entstehen kann. Gleichzeitig wird ein großer Teil des Ballasts überflüssig, den eine an weitgehender Allgemeingültigkeit orientiere Darstellung zwangsläufig haben muss. Nicht verschwiegen werden darf freilich auch ein gravierender Nachteil: So wird manche aufwändige, wenn auch elementare Berechnung notwendig, deren Ergebnis zumindest in qualitativer Hinsicht weit einfacher auf der Basis allgemeiner Prinzipien hätte hergeleitet werden können.

Um auch von der äußeren Form eine deutliche Trennlinie zu Lehrbüchern zu ziehen, habe ich mich dazu entschlossen, die gleiche Darstellungsform zu wählen, die meinem auf einen ähnlichen Leserkreis ausgerichteten Buch *Glück, Logik und Bluff: Mathematik im Spiel – Methoden, Ergebnisse und Grenzen* zugrunde liegt: Jedes Kapitel beginnt mit einer plakativen, manchmal mehr oder weniger rhetorisch gemeinten Fragestellung, die insbesondere dem Anfänger Hinweise auf Natur und Schwierigkeit des im betreffenden Kapitel behandelten Problems gibt, auch wenn der Inhalt des Kapitels meist weit über die Beantwortung der gestellten Frage hinausreicht. Aber auch den mathematisch bestens vorgebildeten Lesern, für die der hier gebotene Überblick manchmal zu oberflächlich und unvollständig bleiben muss, ermöglicht diese Struktur eine schnelle und gezielte Auswahl der für sie jeweils interessanten Teile – die angegebene Fachliteratur weist dann den weiteren Weg.

Die Themen der einzelnen Kapitel sind zu eng miteinander verwoben, als dass ein Verständnis unabhängig voneinander möglich wäre. Trotzdem wird aber denjenigen, die nur an einzelnen Aspekten dieses Buches interessiert sind, empfohlen, direkt einen Einstieg zu Beginn des betreffenden Kapitels zu versuchen. Selbst, wenn man dann doch auf den einen oder anderen Verweis zu überschlagenen Kapiteln stößt, so sind doch zumindest die Details der dort vorgenommenen Berechnungen für das Verständnis der nachfolgenden Kapitel überflüssig. Natürlich bietet der Be-

ginn jedes Kapitels auch die Chance eines Neueinstiegs für diejenigen, für die einige Details der vorangegangen Kapitel zu schwierig waren.

Als „Fahrplan“ für Leser, die sich abseits der sehr abstrakten Passagen nur einen Überblick verschaffen möchten, wird die folgende Auswahl vorgeschlagen:

- Bei den Kapiteln 1 bis 6 können die in den Kästen zusammengestellten Beweise übersprungen werden,
- von Kapitel 7 reicht für das weitere Verständnis der erste Teil, der das regelmäßige Siebzehneck behandelt,
- Kapitel 8 kann ganz ausgelassen werden,
- bei Kapitel 9 können die Kästen am Ende des Kapitels überschlagen werden,
- auf die Lektüre von Kapitel 10 und des Epilogs kann ganz verzichtet werden.

Leser, die eine typische Vorlesung „Algebra I“ einführend begleiten möchten, sollten die beiden Kapitel 9 und 10, in denen die Galois-Theorie behandelt wird, sowie den Epilog in den Vordergrund ihrer Lektüre stellen. Für deren tieferes Verständnis wichtig sind der Hauptsatz über symmetrische Polynome (Kapitel 5), die in Kapitel 6 erörterten Produktzerlegungen von Polynomen sowie die wesentlichen Ideen zur Kreisteilung (erster Teil von Kapitel 7). Ob den anderen Kapiteln ein mehr oder minder starkes Augenmerk entgegengebracht wird, sollte dann von den persönlichen Interessen und Vorkenntnissen abhängig gemacht werden.

Entsprechend der historischen Entwicklung lässt sich die nachfolgende Darstellung der Auflösbarkeit von Gleichungen in drei Teile gliedern:

- **Klassische Methoden** der Auflösung, die auf Folgen mehr oder minder komplizierter Äquivalenzumformungen von Gleichungen beruhen, wurden historisch zur Herleitung der allgemeinen Formeln für quadratische, kubische und biquadratische Gleichungen verwendet (Kapitel 1 bis 3).

- **Systematische Untersuchungen** der gefundenen Auflösungsformeln werden möglich, wenn man die Zwischenergebnisse der einzelnen Rechenschritte durch die Endresultate, das heißt durch die *Gesamtheit* der gesuchten Lösungen, ausdrückt (Kapitel 4 und 5). Auf diesem

Weg lassen sich auch spezielle Gleichungen lösen, die gegenüber dem allgemeinen Fall insofern eine niedrigere Komplexität aufweisen, als dass zwischen ihren Lösungen bestimmte Beziehungen, gemeint sind mittels Polynomen formulierbare Identitäten, bestehen. Neben Gleichungen, die in Gleichungen niedrigerer Grade zerlegt werden können (Kapitel 6), sind die so genannten Kreisteilungsgleichungen $x^n - 1 = 0$ Beispiele für solchermaßen weniger komplexe Gleichungen (Kapitel 7). Auch der in Kapitel 8 beschriebene Versuch, eine allgemeine, letztlich aber nur in speziellen Fällen funktionierende Lösungsformel für Gleichungen fünften Grades zu finden, ist diesem Teil zuzurechnen.

- Auf Basis der systematischen Untersuchungen von Auflösungsformeln können schließlich auch die **Grenzen einer Auflösbarkeit durch Wurzelformeln** ergründet werden. Diese von Abel und Galois erkannten und untersuchten Grenzen werden wir, abgesehen von einer kleinen Vorschau in Kapitel 5, in den Kapiteln 9 und 10 behandeln. Im Mittelpunkt stehen dabei die schon erwähnten Galois-Gruppen

  Mit der Untersuchung von Galois-Gruppen wird ein Schwierigkeitsgrad erreicht, bei dem das Anforderungsniveau der ersten Kapitel deutlich übertroffen wird. Daher werden zwei Darstellungen gegeben: In Kapitel 9 wird ein relativ elementarer, mit zahlreichen Beispielen ergänzter Überblick gegeben, wobei der Umfang der verwendeten Begriffe so weit irgendwie möglich und sinnvoll reduziert ist. Die dabei entstehenden Lücken werden dann in Kapitel 10 geschlossen, in dessen Mittelpunkt der schon erwähnte Hauptsatz der Galois-Theorie steht, der es erlaubt, so genannte Körper zu bestimmen, also die schon erörterten Zahlbereiche, bei denen die vier arithmetischen Grundoperationen nicht herausführen. Auch die diesbezüglichen Darlegungen in Kapitel 10 beschränken sich bewusst auf die wesentlichen Aspekte der Galois-Theorie.

Für Leser, die ihre Kenntnis der Galois-Theorie nach der Lektüre dieses Buches vertiefen wollen, kann als Fortsetzung eigentlich jedes Lehrbuch der Algebra beziehungsweise der Galois-Theorie empfohlen werden. Stellvertretend auch für andere sollen an dieser Stelle nur die beiden Klassiker *Algebra* von Bartel Leendert van der Waerden (1903-1996) und *Galoissche Theorie* von Emil Artin (1898-1962) genannt werden, deren

erste Auflagen 1930 und 1948 erschienen. Aber auch umgekehrt stellt das vorliegende Buch zumindest in Bezug auf die erörterten Beispiele und wohl auch im Hinblick auf die Motivation von algebraischen Begriffsbildungen eine hilfreiche Ergänzung zu den gebräuchlichen Lehrbüchern der Algebra dar.

Selbstverständlich möchte ich es nicht versäumen, mich bei all denjenigen zu bedanken, die zum Entstehen dieses Buches beigetragen haben: Äußerst hilfreiche Hinweise auf Fehler und Unzulänglichkeiten in Vorversionen dieses Buches habe ich erhalten von Jürgen Behrndt, Rudolf Ketterl und Franz Lemmermeyer. Dank ihrer Hinweise konnte die Zahl der Fehler entscheidend verringert werden – die verbliebenen Fehler gehen natürlich allein auf mein Konto. Dem Vieweg-Verlag und seiner Programmleiterin Ulrike Schmickler-Hirzebruch habe ich dafür zu danken, das vorliegende Buch ins Verlagsprogramm aufgenommen zu haben. Und schließlich schulde ich einen besonderen Dank meiner Frau Claudia, ohne deren manchmal strapaziertes Verständnis dieses Buch nicht hätte entstehen können.

Vorwort zur zweiten Auflage

Der erfreuliche Umstand, dass die erste Auflage nach nur zwei Jahren vergriffen ist, gibt mir Gelegenheit, einige Literaturverweise zu ergänzen und zwischenzeitlich durch aufmerksame Leser sowie mir selbst gefundene Druckfehler zu korrigieren: Zu danken habe ich dabei Daniel Adler, Ulrich Brosa, Kurt Ewald, Volker Kern, Ralf Krawczyk und Heinz Lüneburg.

JÖRG BEWERSDORFF[3]

---

[3] Unter joerg.bewersdorff@t-online.de sind Hinweise auf Fehler und Unzulänglichkeiten willkommen. Auch Fragen werden, soweit es mir möglich ist, gerne beantwortet. Ergänzungen und Korrekturen werden auf meiner Homepage
http://www.bewersdorff-online.de
veröffentlicht.

Inhaltsverzeichnis

Stichwortverzeichnis