Spiele aus mathematischer Sicht – garantiert ohne Formeln[1]

Jörg Bewersdorff

Von Alex Randolph, dem wir neben einer breiten Palette zeitlos schöner Spiele auch grundlegende Impulse bei der Etablierung von Autorenspielen verdanken, stammt die Charakterisierung

> *Es gibt zwei Elemente, durch die sich Spiele von allen anderen unseren Erfahrungswelten unterscheiden:*
>
> *Das eine Element ist die Ungewissheit, das andere Element die Gerechtigkeit.*[2]

Auch wenn man durchaus in Frage stellen kann, ob diese beiden Eigenschaften tatsächlich exklusiv nur bei Gesellschaftsspielen gemeinsam in Erscheinung treten, so sind sie doch beide zweifelsohne zentrale Eigenschaften eines jeden Spiels, deren konkrete Ausgestaltung den Typus des Spieles in spielerischer, mathematischer und ggf. sogar rechtlicher Hinsicht bestimmt.

Die Ungewissheit im Spiel und ihre Ursachen

Beginnen wir mit der Ungewissheit, über die Randolph übrigens an anderer Stelle einmal bemerkt hat:

> *Das Abenteuergefühl ist ein Element des Spiels. Wir setzen uns der Ungewissheit des Schicksals aus und erleben, wie wir es durch unsere eigene Tätigkeit in den Griff bekommen.*[3]

Erst die Ungewissheit macht Gesellschaftsspiele interessant. Denn wir spielen, weil Verlauf und Ausgang eines Spiels für seine Mitspieler und die möglicherweise anwesenden Zuschauer im Dunklen liegen. Analogien zu anderen Formen der Unterhaltung – Literatur, Film und Sport –, aber auch zum „richtigen Leben“

[1] Als Vortrag gehalten am 16.03.2008 auf den 3. Deutschen Spielautorentagen, Weilburg: Vortragsfolien.

[2] 1998 auf einem Brettspieltreffen. Zitiert nach Hugo Kastner, www.spielbox-online.de/spielarchiv/and/spann3eck.php4, Stand 18.03.2004.

[3] Spielbox 1985, Heft 1, S. 30.

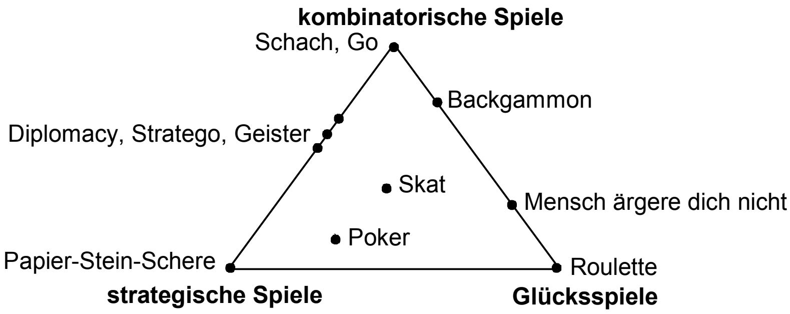
sind unverkennbar. Im Spiel sorgt die Ungewissheit sowohl für die Abwechslung und damit die kurzweilige Unterhaltung als auch für die allseitige Gewinnhoffnung, bei der selbst der Verlierer der gerade beendeten Partie auf eine Revanche hoffen kann: „Neues Spiel – neues Glück".

Wie aber entsteht diese Ungewissheit aus den vollständig determinierten und damit keineswegs ungewissen Spiel*regeln*? Abgesehen von seltenen Ausnahmen gibt es dafür nur drei prinzipiell verschiedene Ursachen:

- Am offensichtlichsten ist sicher der **Zufall**, der beim Würfeln oder Mischen von Spielkarten und -steinen wirkt.
- In Brettspielen, die häufig keine Zufallselemente aufweisen, basiert die Ungewissheit meist auf der Vielfalt der möglichen Kombinationen von Zugfolgen. Diese **Kombinationsvielfalt** sorgt dafür, dass uns bereits eine einfach erscheinende Schachaufgabe vom Typ „Matt in zwei Zügen" durchaus stundenlang beschäftigen kann, da sich bereits die drei in Betracht zu ziehenden Halbzüge zu einer kaum überschaubaren Vielzahl von Zugfolgen kombinieren.
- Weniger offensichtlich, da meist mit zufälligen Einflüssen vermischt, ist die durch **verdeckte Information** entstehende Ungewissheit über den weiteren Spielverlauf. Grob umrissen ist damit gemeint, dass jeder Spieler nur seine eigenen Karten kennt. Sogar ganz ohne begleitenden Zufall, der bei Spielkarten meist die Verteilung bestimmt, kann Ungewissheit aus verdeckter Information entstehen, nämlich dann, wenn Spieler sich wie bei Papier-Stein-Schere gleichzeitig für den anstehenden Zug entscheiden müssen. Im Einzelfall lässt sich der auf verdeckter Information beruhende Anteil an Ungewissheit dadurch abgrenzen, dass man die Spielregeln zumindest fiktiv dahingehend ändert, so dass mit „offenen Karten" gespielt wird: Skat behielte dann aufgrund seiner kombinatorischen Elemente noch etwas spielerischen Reiz, während Poker zur Farce würde.

Weitere Ursachen der Ungewissheit, wie Unklarheit über Regeln (welche Worte sind beim „Scrabble" zugelassen?), die Beherrschung körperlichen Geschicks (Mikado) oder die Wertung kreativer Beiträge („Barbarossa") sind eher Randerscheinungen einzelner Spiele.

Mit diesen drei erkannten Ursachen der Ungewissheit erhält man nun eine Typisierung von Spielen, die deutlich von der üblichen, de facto unzureichenden Einteilung nach nur zwei Faktoren, nämlich Glück einerseits und Geschick/Können andererseits, abweicht. Ein Diagramm bietet sich an, Spiele vergleichend darzustellen.



Die Ziele mathematischer Analysen

Grob gesagt ist es das Ziel mathematischer Analysen, die gerade als typisches Element von Spielen erkannte Ungewissheit objektiv zu klassifizieren, nach Möglichkeit zu reduzieren oder sogar vollständig zu überwinden.

Die Motive für ein solches Ziel können ganz unterschiedlich sein:

- Ein Hauptmotiv ist sicherlich die Programmierung von (gut!) spielenden Programmen, wie es insbesondere für das Schach eine langjährige, inzwischen bis zur Weltmeister-Klasse reichende Tradition gibt.
- Die Frage danach, wie erfolgwirksam solche Möglichkeiten überhaupt sein können, ist natürlich von einem eigenständigen, wenn auch eher prinzipiellen Interesse: Mit welcher Gewissheit – qualitativ wie quantitativ – kann ein exzellenter Spieler („Weltmeister") oder ein perfektes Programm einen Gewinn erzwingen? Dabei zeigt sich, dass die Antwort auf solche Fragen eng mit dem „ludographischen Charakter" eines Spiels zusammenhängt.
- Eng damit verbunden, wenn auch eher mit gegenläufigem Blickwinkel, sind juristische Fragestellungen, bei denen der Glücksspielcharakter von Spielen im Hinblick auf straf- und steuerrechtliche Konsequenzen bejaht oder verneint wird[4].

---

[4] So zitiert u.a. das Urteil RV/1662-W/06 des Unabhängigen Finanzsenats Wien vom 5. April 2007 ausführlich mein Buch *Glück, Logik und Bluff*. Andere Gerichte wie das VG Wiesbaden (10.10.1995, 5/3E 32/94, Gewerbearchiv, 1996, S. 68-69) haben allerdings darauf verzichtet, wissenschaftlich fundierte Tatsachen zu berücksichtigen. Dazu ein Zitat aus dem Urteil:
Schach gegen einen Computer wird — trotz der ausschließlich von der Logik beherrschten Spielregeln — zum Glücksspiel, wenn die Bedingungen so gesetzt werden, daß der Computer seine im Programm angelegte Überlegenheit ausspielen kann und der Durchschnittsspieler deshalb auch unter Aufbietung höchster Anspannung chancenlos ist.
Anzumerken bleibt: Ein Spiel, das durch einen Spieler immer verloren wird, beinhaltet

- Nicht zu übersehen sind ebenso ökonomische Motivationen, etwa bei kommerziell angebotenen Glücksspielen (Spielkasinos, Spielautomaten, Lotterien) und „Spielen", bei denen nach vorher genau festgelegten Bedingungen Lizenzen für Mobilfunk, Rundfunk und Fernsehen versteigert werden. Gefragt ist dann die Gestaltung einer („Spiel"-)regel, mit welcher der „richtige" Preis erzielt wird (so wurde im Fall der sechs deutschen UMTS-Lizenzen die gigantische Summe von knapp 100 Milliarden DM erlöst).

Symmetrische Spiele: Die ideale Erfolgskontrolle

Alex Randolphs Gerechtigkeits-Anspruch an Spiele ist für die praktische Gestaltung eines Spieles fast selbstverständlich. Um diesem Anspruch zu genügen, sind bei den meisten Spielen die Zugmöglichkeiten der Spieler meist symmetrisch. Starten dabei die Spielsteine der Spieler an unterschiedlichen Stellen des Spielbrettes, weist dieses Spielbrett meist selbst entsprechende Symmetrien auf.

Ein Bruch der Symmetrie findet man dagegen beim Recht auf den ersten Zug. Häufig wird dieses Recht ausgelost, wobei wieder – wenn auch nun auf Basis einer Zufallsentscheidung – eine Symmetrie erreicht wird. Ebenso möglich ist es, mehrere Partien mit unterschiedlichem Anzugsrecht zu spielen. Eigens für sein Brettspiel „Twixt" ersann Randolph die sogenannte „Kuchenregel", die zwar keine Symmetrie herstellt, dafür aber den ansonsten offensichtlichen Vorteil anziehenden Spielers in der Praxis zu mildern scheint.

Auch für die Überprüfung der Erfolgswirksamkeit guter Spielweisen besitzt die Symmetrie eine entscheidende Bedeutung: So ist ein Schachprogramm genau dann optimal, wenn es gegen jeden noch so guten Gegner in einem Hin- und Rückspiel mit vertauschten Farben insgesamt stets mindestens den Punktestand 0 erzielt (mehr als dieser Punktestand 0 ist aufgrund der Symmetrie offensichtlich nicht erzwingbar). Damit werden „Black Box"-Tests möglich.

Die Methoden mathematischer Spiel-Analysen

Abhängig von den unterschiedlichen Ursachen für die spieltypische Ungewissheit bedarf es sehr unterschiedlicher Methoden, Spiele mathematisch zu untersuchen, wobei es durchaus auch negative Ergebnisse dahingehend gibt, dass be-

---

keinen Zufall und ist daher zwar unfair (und langweilig), aber keinesfalls ein Glücksspiel, auch nicht im rechtlichen Sinne. Es fehlt nämlich der Zufall, der rechtlich als „das Wirken einer unberechenbaren, der entscheidenden Mitwirkung der Beteiligten in ihrem Durchschnitt entzogenen Ursächlichkeit" gesehen wird.

stimmte Ziele einer Analyse unerreichbar sind. Da hier nicht auf Einzelheiten eingegangen werden kann, muss ein kurzer Überblick reichen.

1. Glücksspiele:

Die Frage von Spielern nach den Gewinnchancen in Glücksspielen inspirierte im 17. Jahrhundert die beiden Mathematiker Blaise Pascal und Pierre de Fermat, über mathematische Gesetzmäßigkeiten zufälliger Prozesse nachzudenken. Aus der zunächst „Glückspieltheorie“ genannten Disziplin entstand schließlich die mathematische Wahrscheinlichkeitsrechnung, die heute in vielfältiger Weise in Natur-, Wirtschafts- und Sozialwissenschaften angewendet wird.

Zentraler Begriff ist die Wahrscheinlichkeit, die als Maß für die Gewissheit interpretiert werden kann, mit der ein zufälliges Ereignis eintritt. Für Glücksspiele interessiert natürlich primär die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass ein bestimmter Spieler gewinnt. Häufig muss aber nicht nur der Gewinn als solches, sondern zugleich auch seine Höhe berücksichtigt werden. Zu berechnen sind dann der durchschnittliche Gewinn und das mit dem Spiel verbundene Risiko. Aber nicht immer muss ein Spiel vollständig analysiert werden, beispielsweise dann, wenn ein Backgammon-Spieler unterschiedliche Zugmöglichkeiten gegeneinander abzuwägen hat.

2. Kombinatorische Spiele:

Für die kombinatorischen Elemente in Spielen gibt es keine einheitliche Theorie. Jedoch können mit den unterschiedlichsten mathematischen Methoden sowohl prinzipielle als auch für Einzelfälle konkrete Resultate erzielt werden.

Kombinatorische Spiele, namentlich die traditionsreichen Vertreter Schach und Go, gelten als Spiele mit hohem intellektuellen Anspruch. Schon früh in der Entwicklungsgeschichte der Rechenmaschinen reifte daher der Wunsch heran, in Maschinen ebenbürtige Spielgegner finden zu können. Wie aber lässt sich das realisieren? Dafür benötigt werden Rechenverfahren, mit denen ausreichend gute Züge gefunden werden können. Kann die Güte eines Zuges aber überhaupt eindeutig bewertet werden oder hängt sie nicht immer von der gegnerischen Antwort ab? Immerhin ist der Suchverfahren und Computertechnik umfassende aktuelle Stand der Technik beeindruckend. Ein durchschnittlicher Schachspieler besitzt nämlich gegen die besseren Schachprogramme kaum noch eine Chance. Aber nicht nur Schach war Gegenstand des mathematischen Interesses. Für viele Spiele konnten, zum Teil auf überraschend einfache Weise, sichere Gewinnstrategien gefunden werden. Bei anderen Spielen kann seltsamerweise nur bestimmt werden, welcher Spieler theoretisch stets gewinnen kann, ohne dass bis heute eine Gewinnstrategie konkret bekannt ist. Einige dieser Spiele besitzen sogar

Eigenschaften, die kaum eine Hoffnung bestehen lassen, je eine solche Gewinnstrategie zu finden.

3. Strategische Spiele:

Ausgehend von den strategischen Komponenten eines Spieles wurde eine eigene mathematische Disziplin begründet, die so genannte Spieltheorie. Spiele fungieren dort als Modell, auf deren Basis interaktive, ökonomische Prozesse in Abhängigkeit von getroffenen Entscheidungen untersucht werden. Am Beginn der Spieltheorie steht eine mathematisch formale Definition eines Spiels. Charakterisiert wird ein Spiel durch seine Regeln und diese umfassen die folgenden Angaben:

- Die Anzahl der Mitspieler.
- Zu jedem Spielstand die Aussage darüber,
  - wer am Zug ist,
  - welche Zugmöglichkeiten für den betreffenden Spieler bestehen und
  - auf Basis welcher Informationen er seine Entscheidung zu treffen hat.
- Für beendete Partien, wer wie viel gewonnen hat.
- Bei Zufallszügen, wie wahrscheinlich die möglichen Ergebnisse sind.

Als eigenständige Disziplin entstand die Spieltheorie erst 1944, als fast aus dem Nichts eine monumentale Monographie über die Theorie der Spiele erschien. Auch wenn sich dieses Werk an verschiedenen Stellen Spielen wie Schach, Bridge und Pokern widmet, sind für die Spieltheorie wirkliche Gesellschaftsspiele im Vergleich zu ökonomischen Prozessen eigentlich nachrangig. Dass sich Spiele überhaupt als Modell für reale Abläufe eignen, überrascht eigentlich nicht. Schließlich sind viele Spielelemente Konflikten um Geld, Macht oder gar Leben entlehnt. Insofern bietet sich die „Umkehrung" geradezu an, dass heißt, die Interaktion von Individuen – ob in Konkurrenz oder in Kooperation – auf der Basis eines an Spiele angelehnten Modells zu beschreiben und zu untersuchen. Die weitgehende Idealisierung ist dabei genauso unvermeidbar, wie es bei anderen Modellen der Fall ist, etwa wenn in der Physik die Masse eines Körpers als auf einen Punkt konzentriert angenommen wird.

Dass die Frage nach optimalen Spielzügen auch bei einfachen Spielen keineswegs trivial ist, offenbart bereits ein so simples Spiel wie Papier-Stein-Schere. Kein Zug ist wirklich gut, aber immerhin kann man mit einer zufällige Zugauswahl verhindern, selbst von einem psychologischen Genie durchschaut zu werden.

Prinzipielle Ergebnisse

Wie nicht anders zu erwarten, hängt es maßgeblich vom Typ eines Spiels ab, wie sicher ein erfahrener Spieler mit seiner Spielweise einen Sieg erzwingen kann. Wir gehen dabei jeweils von einem vollständig symmetrischen Spiel aus, wozu in der Praxis einfach genügend viele Partien mit vertauschten Rollen, insbesondere das Anzugsrecht betreffend, gespielt werden (bei einem Zwei-Personen-Spiel einfach Hin- und Rückspiel). Auf die bereits gestellte Frage danach, ob ein guter Spieler dann das Spielergebnis 0 erzwingen kann, wollen wir nun die Antworten skizzieren:

Dass **Schach** und gleichfalls alle rein kombinatorischen Zwei-Personen-Spiele (also ohne Zufallseinfluss und ohne verdeckten Spielelemente) im Prinzip komplett berechenbar und daher von einem Computer theoretisch perfekt gespielt werden können, überrascht eigentlich niemanden, der schon einmal gegen ein Schachprogramm gespielt hat. Ist ein Spieler in einem solchen Spiel am Zug, so sind seine Zugmöglichkeiten in qualitativer Hinsicht objektiv, das heißt ohne Kenntnis der Pläne des Gegners, untereinander vergleichbar. Solche Spiele besitzen daher zu recht das Image eines intellektuellen Wettkampfes.

Etwas komplizierter wird die Angelegenheit bei Zwei-Personen-Spielen, die wie **Backgammon** zwar Zufallseinflüsse aber keine verdeckten Elemente aufweisen. Auch dort sind Zugmöglichkeiten eines Spielers objektiv untereinander vergleichbar. Allerdings beschränkt sich die Erfolgswirksamkeit guter Spielweisen auf einen theoretischen Durchschnitt, da man trotz guter Spielweise in einer einzelnen Partie (die Revanche mit vertauschten Farben eingeschlossen) einfach einmal Pech haben kann. Immerhin wird sich aber bei längeren Partienserien auf Dauer der bessere Spieler durchsetzen.

In Bezug auf die Erfolgswirksamkeit guter Spielweisen ähnlich verhalten sich alle anderen Zwei-Personen-Spiele, auch solche ohne Zufallseinfluss wie **Papier-Stein-Schere** und **Stratego**. Der Grund dafür ist, dass gute, das heißt nicht vom Gegner zu durchschauende Spielweisen, zufällig generiert werden müssen, wie es bereits beim einfachen (Bei-)spiel Papier-Stein-Schere deutlich wird: Trotz der Symmetrie des Spiels ist keiner der drei möglichen Züge objektiv gut, da es zu jedem Zug eine Widerlegung des Gegners gibt. Erst wenn ein Spieler seinen Zug mit gleichen Wahrscheinlichkeiten auswürfelt, kann er nicht mehr vom Gegner durchschaut werden und so im theoretischen Mittel (und praktisch in einer längeren Serie von Partien) einen Verlust verhindern. Die somit mathematisch nachweisbare Notwendigkeit, die Spielweise in einer bestimmten Spielsituation zufällig zu variieren, ist beim **Pokern** als Bluffen bekannt.

Weit komplexer sind Mehr-Personen-Spiele. Bereits der einfachste Fall eines symmetrischen (bzw. mittels Rückrunden symmetrisierten) Drei-Personen-Spieles ohne Zufallseinfluss und ohne verdeckten Spielelemente gewährt in der Regel keinem Einzelspieler eine erfolgswirksame Eingriffsmöglichkeit. Daher sind nach meiner Einschätzung alle Ansätze zur Konstruktion einer **Drei-Personen-Schach-Variante** zumindest dann vergeblich, wenn man nach einem Spiel sucht, das wie das Zwei-Personen-Original den Charakter eines intellektuellen Wettkampfes aufweisen soll. Konkret: Selbst der erfahrenste Spieler wird gegen zwei fünfjährige Kontrahenten, denen man gerade die Spielregeln beigebracht hat, eine Partienrunde verlieren können. Somit ergibt sich für Spielautoren meines Erachtens die Konsequenz, dass Mehr-Personen-Spielen der sowieso nicht erreichbare Charakter eines Denkspiels auch augenscheinlich genommen werden sollte, nämlich dadurch, dass zufällige oder verdeckte Spielelemente aufgenommen werden.

Eine Auswahl von konkreten Ergebnissen

Die folgende Auswahl soll auf einem relativ elementaren Niveau die Vielfalt von Aussagen in repräsentativer Weise deutlich machen, die sich über Gesellschaftsspiele erzielen lassen.

Beim Wirtschaftsspiel **Monopoly** ist es – wie im richtigen Leben – von entscheidender Bedeutung, erfolgversprechende Investments zu erkennen. Diese werden bestimmt durch die erzielbaren Miethöhen und die Häufigkeit, solche Erträge zu erhalten. Letztere sind aber Wahrscheinlichkeiten, dass ein Mitspieler die betreffende Straße „besucht“. Dabei gibt es überraschende Unterschiede. So landet man auf dem Opernplatz 48% häufiger als auf der Parkstraße. Eine Visualisierung dieser Berechnung findet man auf meiner Homepage.

Bei **Black Jack**, der amerikanischen Version des deutschen Siebzehn-und-Vier, gelang es 1961 dem amerikanischen Mathematikprofessor Edward Thorp, eine auf Dauer die (Spiel-)Bank schlagende Strategie zu berechnen. Dazu muss der Spieler sein Ziehverhalten – mit höchster Konzentration – nicht nur abhängig von der aktuellen Spielsituation, sondern auch von den bereits „verbrauchten“ Karten variieren. Aufgrund von Thorps Resultaten wurden die Regeln des Black Jack in Spielcasinos mehrfach angepasst. Auf meiner Homepage ist ein interaktiver Black-Jack-Rechner abrufbar, der für jede beliebige Spielsituation die optimale Verhaltensweise berechnet.

Ein wirklich guter Spieler, der keine Fehler macht, muss keine **Mühle**-Partie verlieren. Dieses Resultat wurde von Ralph Gasser in seiner Dissertation zusammen mit seinem Doktorvater, dem Züricher ETH-Professor für Informatik Jürg Nievergelt 1994 mit einer umfassenden Datenbank von Positionen bewiesen. Diese

Datenbank enthält für Spieler, die zuvor entsprechend gespielt haben, jeweils einen Zug, der den Verlust der Partie verhindert.

Für das Border-to-Border-Spiel **Hex** besitzt der anziehende Spieler bei jeder Spielfeldgröße $n \times n$ eine Strategie, mit der er einen Sieg erzwingen kann. Dies wurde bereits 1948 unter anderem von dem späteren Nobelpreisträger John Nash bemerkt, dessen Biographie *Beautiful Mind* in ihrer Verfilmung mit mehreren Oscars prämiert wurde. Allerdings wird ein Computer bei genügend großen Spielbrettern nie für jede beliebige Position optimale Züge berechnen können, weil der dazu notwendige Rechenaufwand – auf Basis des heutigen Erkenntnisstandes über die prinzipiellen Berechungsmöglichkeiten von Computern – zu hoch ist. Dieses Resultat wurde von Stefan Reisch 1979 in seiner bemerkenswerten Diplomarbeit an der Universität Bielefeld bewiesen.

Für das einfache 2-Personen-Bluff-Spiel „**QUAAK!**“, das von Dirk Hanneforth erfunden und bei Ravensburger als Mitbring-Spiel vermarktet wurde (und das man als eine vereinfachte Version von Randolphs „Hol’s der Geier“ ansehen kann), habe ich Mitte der 1990er-Jahre eine optimale Bluffstrategie berechnet und für meine Homepage als interaktive Internetseite implementiert. Diesen Spielcomputer kann man auf Dauer nicht „ausbluffen“.

Literatur

Bewersdorff, Jörg: Glück, Logik und Bluff. Mathematik im Spiel – Methoden, Ergebnisse und Grenzen. Wiesbaden: 2007.

Bewersdorff, Jörg: Luck, Logic and White Lies. The Mathematics of Games. Wellesley: 2005.

Der Autor

Dr. Jörg Bewersdorff (www.bewersdorff-online.de) studierte Mathematik und Informatik in Bonn, wo er 1985 nach seiner Forschungstätigkeit am Max-Planck-Institut für Mathematik promovierte. Seitdem arbeit er als Spieldesigner von elektronischen Unterhaltungsspielen – seit 1998 in Funktion des Geschäftsführers der Firma Mega-Spielgeräte in Limburg. Nebenberuflich ist er Autor mathematischer Fachbücher, darunter das mittlerweile in 4. Auflage und in englischer Übersetzung erschienene Standardwerk *Glück, Logik und Bluff: Mathematik im Spiel – Methoden, Ergebnisse und Grenzen*.